钱伟长 编著

穿甲力学

国防工业出版社

穿甲力学

钱伟长 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了弹体和靶体的撞击所产生的侵入和击穿现象，包括了近三十年来关于穿甲力学的主要进展。其中有一部分是作者的研究成果。

本书共分九章，内容包括弹体、靶体，撞击的实验和理论；半无限靶体、薄靶、中厚靶、厚靶的各种理论和经验计算公式以及一些计算方法。本书特别强调撞击的弹塑性理论。

本书可供有关国防科学研究人员、工程技术人员和高等学校师生参考。

穿 甲 力 学

钱伟长 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 12 3/4　322 千字

1984年12月第一版　1984年12月第一次印刷　印数：0,001—1,450册

统一书号：15034·2753　　定价：2.30元

序

自有枪炮以来就有穿甲力学。穿甲力学亦称末端弹道学。晚近由于科学技术的发展，穿甲力学和陨石撞击、钻井、入水诸技术相联系，总称高速和超高速撞击动力学，或简称撞击力学。

穿甲力学的发展约分三个时期。第一个时期是从十八世纪到本世纪三十年代二次大战前夕。在这个时期，人们既缺乏实验工具，又缺乏必要的如塑性力学的理论基础，而主要从事实弹射击试验，从试验中综合各种各样的经验公式，以备设计枪炮子弹和防御装甲之用。始于四十年代初期的第二个时期是由于二次大战的冲击而兴起的分析理论时期。这个时期有着各种重要的理论发展。这种发展是密切地联系着塑性力学、粘塑性力学特别是塑性动力学的发展而进行的。著名的英国力学权威 G.I.泰勒有关动力屈服强度的测定和弹塑性扩孔理论的建立等工作，把穿甲力学的研究活动推向了一个理论高潮。在这个时期内，人们着重分析靶板的各种破坏模式，根据不同模式建立不同的有效的分析理论。在四十年代，美国加里福尼亚大学和普林斯登大学各自建立的穿甲力学研究组，从收集整理历史数据资料到建立有效分析模型，进行了不少工作。在法国、德国同样也有类似活动。这个时期大概结束于五十年代后期。第三个时期是从六十年代初起一直到现在，约有二十年的历史。这个时期的特点有三个方面：（1）新的实际问题，如陨石与宇宙飞船和人造卫星的撞击、鱼雷入水和地质勘探的钻井问题的提出，扩大了穿甲力学的对象和范围。人们开始研究超高速撞击、多孔松散介质和半无限靶体等问题。（2）创设了各种各样近代化技术试验装备，如轻气枪、高速照相技术以及计算机激光联合测定弹速技术等，大大推进了在可控条件下的科学试验，从而越出了长期以来用实弹打靶试验的束缚。在实

弹试验中一般不能控制实验条件，并不能有目的地进行研究工作。(3)计算机的发展，给撞击过程的计算带来了极大的进步。人们有可能考虑多种因素联合作用下的撞击破坏过程，从计算空间场的数值结果来创立更合理的分析模型。到目前为止，业已有几十种有效的计算程序供研究设计工作使用。这一个时期是穿甲力学或高速和超高速撞击力学最兴旺发达的时期。在世界各国从事这一方面工作的科技人员数以万计。以美国为例，在很多大学有教授从事这一方面的科研工作；在国防科研机构方面，有马利兰州阿般丁靶场的美国弹道研究所，弗兰克福特兵工厂军械研究所；海军方面，有加里福尼亚中国湖的海军武器中心，摩各角的海军导弹中心，以及海军战术研究中心等；空军方面，有爱葛林空军基地的空军武器研究所，赖爱脱-派脱森空军基地的空军材料研究所，柯脱兰空军基地的空军武器研究所，诺顿空军基地的空间和弹体系统组织等。在民间，也有许多大企业设立了这方面的研究机构，其中有名的如：通用电气公司（G. E）在费城的飞弹和空间部，通用汽车公司（G. M）在加尼福尼亚圣拜勒拉的国防研究所、加里福尼亚拉火牙的“系统科学和软件”（SSS）公司，华盛顿的美国国防战略协会等。其它还有象加里福尼亚大学的罗仑兹李佛玛研究所，丹佛大学的丹佛研究所，麻省理工学院的空气弹性力学和结构研究所，密苏里大学的岩石力学和爆炸研究中心，新墨西哥州的山提亚研究所，斯坦福大学的普尔脱研究所等，都是长期从事这方面的研究工作的。在加拿大，有魁北克的加拿大军器研究和发展中心。在法国，有圣路易的弹道研究所的法德武器研究中心——亦称法德弹道研究所。它们活动的活跃性可由下述情况看出：在1964年时，仅轻气枪加速器的设备，美国就有151套。从1955年～1969年，美国召开了八次超高速撞击的学术会议，自七十年代起，改由AIAA学会召开。从1974年起，还有国际弹道学术会议，每两年举行一次。从六十年代中期开始的国际高压学术会议和高速变形时有关材料性质的一些会议，都是交流和推动这一方面工作的发展的。根据调查，在最近二十年来，

这一方面公开发表的论文和报告就有2100多篇，在本书中就引用约 450 篇。

到现在为止，刚性弹体的正面撞击靶板和半无限靶体的工作都已证明是有效的。对于挤凿破坏的研究更加成功，对薄板花瓣型击穿的研究也是成功的。对尖头弹体的弹塑性扩孔过程的研究，为尖头弹体的击穿理论创造了很好的条件。在超高速撞击方面，流体动力学理论解决了陨石撞击问题。在分析理论方面，动量守恒、能量守恒和阻力定律理论都已形成，有不少工作是可以信任的。在实验方面，取得了长足进步，用加速器把靶体装在空头弹体上向弹体撞击的技术，是最重大的突破，可获得可靠的按各种参数安排的实验数据，为理论的进一步发展创造了客观条件。1977年由美国联合技术协调组编制的，在马利兰州阿般丁靶场美国陆军弹道研究所发行的《侵入公式手册》，就集中记录了所有这些数据，为进一步研究提供了很完备的根据。当然，这二十年来，最大的进步在于数值计算。到目前为止，不仅有上百种计算程序可资利用，而且可以利用这些程序和实验结合在一起，设计为各种目的服务的弹体和靶板。

但是，远不是一切问题都解决了。一般说来，过去的工作大部分都是为处理某一特殊问题而进行的，它们都有局限性而互不联系，各种分析理论也千差万别或互相矛盾，任务完成后便不再有人过问。例如，对于超高速撞击的材料性能研究，当陨石问题提出来后，宇航部门提供了大量资金而红极一时，工作飞速发展，但1964年后，因宇航问题在工程上获得初步解决，不久即无人问津了。我们现在正处在这样一个时代——怎样把这些在局部领域中行之有效的、分析的和半分析的理论统一起来使之成为一个系统，建立几个指导原则，在特定的条件下，按这些指导原则把这个一般的系统简化为特定的系统。当然，要做到这点，人们对繁杂的实验结果还应进一步消化和理解，只有在这个基础上，才有可能建立一个较完备的理论体系，它包括一切特殊的系统和特殊的撞击条件。这就是说，我们现在对于高速和超高速的撞击

力学研究而言，正处于从特殊到一般的科学发展过程中。

对于数值计算而言，人们从运动方程和本构关系的微分方程出发，用连续介质理论建立了计算程序。我们相信，这些计算是可以给出我们所要求的信息的。然而先不论目前的计算程序既耗时间又耗资金，而且是非常复杂的。我们必须指出现在所有的计算中，常常蕴藏着重要的本质性的细节因我们察觉不到而被忽视，同时步长问题在目前还不能很好地控制，有时过大，有时过小；而且在动力方程的质量分配上，一般的集中质量法还是人为的，有时和实际情况出入很大。除了以上一般性的问题以外，还有不少方面，在过去很少进行工作，但恰好是很重要的，到目前为止，还没有很好地解决。

（1）在分析模型方面，怎样决定弹道极限速度和破坏情节（如凿块的重量、尺寸），在目前我们都是根据经验决定的。

（2）在弹坑理论方面，还没有什么有效合理的分析模型，我们对弹坑邻域的非弹性区域、弹坑的受压过程、以及变形过程都不清楚。对这一方面的工作首先还缺乏可靠的实验观察和实验手段。这一方面的研究对于斜击、弹体轴线和弹道轨迹线的交角取向，以及变形弹体的研究都是密切相关的。

（3）在弹体阻力问题中，一般都只考虑了惯性力、靶的压缩和剪切力、摩擦阻力三种力，而忽视了与靶板隆起和盘状变形有关的力。这个力对于弹道极限速度附近的现象，有密切关系，和凿块的运动也有关系。

（4）斜击的问题，在这方面的研究很少。特别在厚靶板、中靶板和半无限靶体方面，这种研究是很重要的。入水问题中也大量是斜击问题。

（5）弹体轴线和射击线方向不同撞击问题，这一方面的研究很缺乏，而它实际是决定弹体跳飞、反弹的重要因素。

（6）旋转弹体的撞击问题，对这一方面完全没有人研究过。

（7）动力条件下的本构关系，目前我们都采用静力条件下

的本构关系。在动力条件下，这类静力本构关系是否通用，仍属疑问。自从泰勒提出了动力屈服强度可以比静力屈服强度高几倍以后，人们对动力材料性能有了新的认识，但对在高速变形下的本构关系还是缺乏研究。

（8）破坏准则，对这问题，特别是多维应力破坏准则，它们和应变速度以及温度的关系，研究很少。这是目前数值计算中亟待解决的问题。

（9）热学和力学耦合和散热问题，最近热学和力学耦合理论在航空部门有关结构上得到了很重大的发展，但在撞击问题上还没有考虑过这种耦合理论。

（10）变形弹体问题，弹体在撞击中发生永久变形，这是影响到撞击过程全局的问题。但是，由于变形引起的问题很复杂，一般都略去弹体变形，在认为弹体是刚性的条件下进行研究的。这里也是一个模型问题，是从实验结果观察研究一个合理而易于处理的变形模型，就能把撞击问题的研究大大提高一步。

以上诸项只是举其大端，略述一二。可见对穿甲力学应该认为是方兴未艾的一门学问。

本书是应华中工学院邀请，为华中工学院和《应用数学和力学》编委会合办的应用数学和力学讲座所编著的讲义。该讲座将有全国高等学校有关教师、研究生，以及国防科研各有关部门的科技人员参加。希望通过本书能总结和介绍国外有关穿甲力学的进展，并能推动国内这一方面的工作。

本书的编著，得到华中工学院党委的关怀和积极支持，才能在庐山以较短的时间完成二十余万字的编著工作，特此表示感谢！在庐山期间，也得到庐山区党委和云中宾馆的领导和许多工作同志的亲切照顾，并此致谢！

本书中有若干章节是本人十几年来累积的工作，希能为祖国的国防现代化有所贡献。但有不少原稿业已毁失，只能按记忆写出大纲，因时间短促未及补足细节，如有不尽意处，请读者原谅并指正。

钱伟长于庐山
1981.9.14.

目　　录

第一章　引论……………………………………………………1
§1.1　穿甲力学的历史……………………………………………1
§1.2　一些基本术语的定义………………………………………3
§1.3　撞击分类……………………………………………………5
§1.4　靶元在撞击中发生的现象…………………………………6
§1.5　撞击相图……………………………………………………18
§1.6　理论处理方法………………………………………………22
参考文献…………………………………………………………25
第二章　穿甲力学的理论和实验方法概貌……………………29
§2.1　穿甲力学概貌………………………………………………29
§2.2　实验结果的经验公式………………………………………29
§2.3　军用枪炮速度的分析模型…………………………………32
§2.4　超高速撞击的分析模型……………………………………34
§2.5　数值方法……………………………………………………35
§2.6　实验方法……………………………………………………54
§2.7　超高速弹体加速器…………………………………………58
参考文献…………………………………………………………71
第三章　弹体特性………………………………………………78
§3.1　弹体分类……………………………………………………78
§3.2　动能侵入体(穿甲弹)………………………………………78
§3.3　装药的侵入体………………………………………………80
§3.4　弹体参数……………………………………………………83
§3.5　弹体和轨迹线的取向………………………………………85
§3.6　刚塑性弹体、撞击变形的泰勒理论(1948)………………86
§3.7　泰勒理论的修正(1982)……………………………………102
§3.8　刚塑性弹体和变形靶体撞击的里希脱理论(1977)………107
§3.9　刚塑性弹体和变形靶板的穿透撞击的里希脱理论(1977～1978)……112
参考文献…………………………………………………………118
第四章　靶体特性………………………………………………119

§4.1 靶体类型 ……119
§4.2 决定靶体模式的各种假设 ……121
§4.3 局部影响假定 ……121
§4.4 刚体运动假定 ……132
§4.5 略去热效应的假定 ……122
§4.6 厚度判据 ……123
§4.7 靶元材料 ……124
参考文献 ……131
第五章 半无限靶体 ……134
§5.1 引论 ……134
§5.2 经验公式 ……137
§5.3 空穴膨胀理论 ……140
§5.4 数值计算 ……147
§5.5 EPIC 程序的基础(拉格朗日坐标) ……148
§5.6 实验程序 ……161
§5.7 斜角撞击的轨迹线的计算 ……163
参考文献 ……168
第六章 薄板靶体的侵入和击穿(上) ……170
§6.1 薄板靶体在弹体撞击下的特点 ……170
§6.2 经验公式 ……170
§6.3 分析模式 ……176
§6.4 未击穿的靶板变形理论之一——弹塑性靶板变形理论(能量理论)(1971) ……177
§6.5 未击穿的靶板变形理论之二——克莱-维尔肖弹性粘塑性变形理论(1971) ……181
§6.6 未击穿的靶板变形理论之三——弹性粘塑性靶板大挠度理论 ……197
§6.7 尼龙或其它织品的防弹衣撞击分析 ……208
参考文献 ……214
第七章 薄板靶体的侵入和击穿(中) ……218
§7.1 刚性钝头弹体对薄板靶体挤凿破坏的宏观理论 ……218
§7.2 刚性平头弹体对薄板靶体的挤凿过程的粘塑性

理论(毕推尔-台维斯1963) ……227
§7.3 尖头弹体对薄靶板的扩孔问题 ……237
§7.4 尖头弹体对薄靶板的泰勒塑性扩孔理论(1948) ……238
§7.5 尖头弹体对薄靶板的弗拉埃堡格塑性扩孔动力理论(1952) ……256
§7.6 在泰勒扩孔弹塑性理论基础上的弹体运动理论 ……278
§7.7 扩孔的孔口对称性问题 ……280
§7.8 筒形弹孔的汤姆逊理论(1955) ……281
参考文献 ……287
第八章 薄板靶体的侵入和击穿(下) ……289
§8.1 截顶锥形弹头的弹体的击穿运动(勃朗1964) ……289
§8.2 花瓣型击穿和采特-保尔动量理论(1957～1959) ……290
§8.3 截顶弹头的花瓣型击穿的采特-保尔动量理论(1958) ……298
§8.4 穿越靶板时的复合抗力函数模式 ……312
§8.5 变形弹体单一挤凿机理的弹塑性流体动力学理论 ……317
§8.6 变形弹体多阶段挤凿机理的塑性力学理论(1974) ……321
§8.7 分为单纯压缩和没有压缩的两个阶段的弹塑性挤凿理论 ……326
§8.8 靶元破坏速度的诸估算公式 ……335
§8.9 流体动力学撞击理论简述 ……336
§8.10 斜击时的运动方向变化，里希脱-尹渡赫理论(1963) ……340
§8.11 斜击时截顶锥头弹体的采特-保尔动量理论(1959) ……344
§8.12 有关薄靶板的数值计算程序 ……364
参考文献 ……366
第九章 中厚靶板和厚靶板的撞击 ……369
§9.1 中厚靶板和厚靶板在撞击中的特点 ……369
§9.2 中厚靶板和厚靶板的经验公式 ……369
§9.3 培涅扩孔理论 ……375
§9.4 波恩-福赫斯的刚弹阻力厚板模型 ……378
§9.5 求击穿后剩余速度的里希脱能量法 ……380
§9.6 尖弹击穿厚板的五阶段理论 ……381
§9.7 潘松的半经验阻力公式(1974～1976) ……383
§9.8 超高速撞击 ……385
§9.9 厚靶板的实验情况 ……392
§9.10 有关中厚和厚靶板的数值计算 ……393
参考文献 ……395

第一章　引　　论

§1.1　穿甲力学的历史

穿甲力学在习惯上是指高速和超高速弹体撞击靶体后，钻入或穿透靶体的力学。它实际上是研究弹体接触靶体以后的弹道运动。所以，人们在早期把它当作弹道学的一部分，称之为末端弹道学。●

对穿甲力学的基本认识，是由人类长期斗争经验所形成的。古代的箭头就是弹体，盾和甲就是靶体。弹体的破坏作用主要靠弹体的重量、速度和刚度。古代人类用金属箭头替代石制箭头，其目的就是为增加弹体的重量和刚度；从弓发展成弩，就是为增加弹体的速度。以后发展了抛石机，即古代的炮，无非是增加弹体的射程和重量的一种措施。在另一方面，人们用盾和甲来抗拒箭矢的撞击。靶体的抗拒作用主要依靠靶体的刚度和厚度，当然重量也有一定的作用。用碉堡和城堞作为靶体，无非是利用它们的厚度和重量，当然城堡的建筑材料如砖石本身，也有刚度作用。

穿甲力学的科学基础，是在十九世纪初形成的。拿破仑时代的法国军事工程学院中，开始有关穿甲力学的科学试验工作。邦锡莱(J. V. Poncelet)在他的《工业力学教本》(1829～1835)[1-1]中曾综合了当时的试验结果，提出了有名的邦锡莱公式。这个公式曾被西欧兵工人士延用了五十年之久[1-2]。在有名的法国经典著作，在海莱（F. Helié）的《弹道试验学》(1840)[1-3]中，曾有四章叙述了各种有关穿甲试验的数据和许多经验公式。接着德国的克鲁伯（F. Krupp）在他的著作《装甲板的穿透》(1885和1890)[1-4]中提供了更多的资料。

● 弹道学中又称终点弹道学。——编者注

第二次大战开始不久（1941），美国的罗伯荪（H. P. Robertson）写的《末端弹道学》[1-5]，曾汇集了过去的许多试验结果，按靶体的材料（即按混凝土、钢、木、土和沙）分类处理，并汇集了有关的经验公式以及钻穿的各种机理。在第二次世界大战中，美国曾对这个问题进行了不少研究试验，其结果都已汇集在一本国防科委（NDRC）的专题报告[1-6]内。它阐明了靶体破坏的概念以及与各种有关因素之间的关系，它列出了不同弹体的影响、垂直撞击和斜向撞击以及靶体参数之间的关关。本问题于是按靶体材料分为若干类（它是分为装甲板、混凝土板、塑料掩蔽层和土层），对每类靶体提供了许多定性的、唯象的和经验的资料。法国萨脱林（R. Sutterlen）曾写过一本专著（1966，1967）[1-7]，涉及整个法国弹道学的研究，其中有很大一部分讲末端弹道学。它报导了许多经验的和半经验的力-钻穿公式，其中包括了斜向入射、钝头和锥头的弹体等问题。它也报导了有关力的定律、透射后的子弹速度、以及易碎子弹的质量损失等问题的各种研究模型。另有两种总结报告（1961，1962）[1-8,1-9]，也有较多处涉及穿甲力学的某些方面。

近十年来，有不少关于弹体射入、钻进靶体的研究，例如：美国海军兵器实验室（NWL）曾公布[1-10]了弹体钻进靶体的经验数据及其有关曲线，还有关于末端弹道学的其它资料；法国杜福尼（M. Duforneaux）在1971年公布[1-11]了有关弹体钻进硬靶的半经验公式，以及有关物理模型；里希脱（R. F. Recht）在1972年公布[1-12]了钻穿过程的半经验模型的简编；萨特等（A. I. O. Zaid，A. El-Kalay，F. W. Travis）在1973年[1-13]公布了有关穿甲力学的广博的文献目录；戈德斯密司（W. Goldsmith）在1974年[1-15]发表了描述刚性弹体穿过薄板靶体过程的分析解；柏刻曼（M. E. Backman）在1976年[1-14]的最新教本《末端弹道学》中着重讲述了弹体的内弹道、外弹道和末端弹道的基本理论，以及有关弹头的分析。所有这些资料都涉及穿甲力学的各个方面。晚近[1-16]，柏刻曼和戈德斯密司又联名发表（1978）了弹体

钻入靶体的综合报告。在同年，国际工程科学杂志[1-17]出版了专集，专门从理论和实践各个角度讨论了这一问题的最新发展。

另一方面，从五十年代后期和六十年代中，超高速撞击受到了广泛的注意。美国在1955～1969年间十五年来，连续召开了八次超高速撞击的会议，会议的文集[1-18]提供了不少分析的和轻气枪实验的研究成果。麻省理工学院的汉曼（W. Herrmann）和琼斯（A. H. Jones）[1-19]，曾汇集总结了有关超高速撞击产生的弹坑和钻进靶体的所有知识(1961)。美国兰德公司的皮约克(R. C. Bjork)[1-20]，总结了人们所知道的超高速撞击的一切物理过程(1963)。通用汽车公司国防研究所的基里斯曼(D. R. Christman等[1-21]在1963年也发表了一份总结报告，对流星体撞击的超高速撞击现象，从经验处理、理论处理和工程考虑等方面予以探讨，每节都有详尽的文献资料目录。在同时期（1963）还有两篇有关流星体撞击的报告[1-22,1-23]，也都附有丰富的参考文献目录。此外还有一篇有关超高速射流和弹体对岩石作用的总结报告(1968)[1-24]。最后京斯劳(R. Kinslow)主编的《高速撞击现象》(1970)[1-25]一书，发表了不少这方面研究的最新成果。

在1963年，美国航空界曾召开了高速撞击下的结构力学会议，会议上宣读了一批有价值的论文[1-26]。在1973年，美国兵工界曾召开了固体力学兵工会议，研究了穿甲力学、靶体的断裂、弹体的分裂、碎裂和靶体的弱点等，以及有关军工弹道学问题[1-27]。还有三本较近期出版的专著[1-28、1-29、1-30]，也有大量涉及高速撞击下材料反应的资料。

从上述情况可以看到，由高速和超高速撞击所产生的穿甲力学的各个方面，在最近二十多年来，有大量的科技人员在进行着工作，并已取得了很大进步。

§1.2　一些基本术语的定义

由于穿甲力学是长期以来通过兵工的、物理的、材料学的和力学的人员，从不同专业角度努力探讨而后综合形成的学问，各

家用词并不统一。所以，本书将对一些基本术语规定统一的定义。

（甲）撞击靶体的物体规定有三种通称名词：（一）弹体（projectile）指满足弹道性能的一切物体，如子弹、炸弹、炮弹等，它们可以有具有特殊性能的子结构。（二）侵入[●]体（penetrator）指纯粹用以侵入或钻进靶体而从定义上完成末端弹道作用的一切物体。（三）撞击体（striker）是泛指一切从事撞击的物体，它不受什么功能要求的限制。

（乙）靶体（target）为弹体撞击的对象，它不论是功能上或结构上，都是自成一体的最小物体。靶体指穿甲弹体所撞击的整个构造物，如坦克等，而不是单纯指弹体射击时打成小孔而穿透的那块靶板。

（丙）子结构（substructure）指靶体所属而有单一功能的任一构造单元。

（丁）靶体元素或靶元（target element）指靶体子结构受到弹体撞击的那一部分，它是人们为被撞击物制定物理模型时，具有所有撞击特性的基本部件。

（戊）侵入或钻进（penetration）指侵入体钻进靶体任一部分的过程。我们必须指出，靶体的侵入，常常是一系列弹体对子结构的撞击所得到的总结果。在这许多反复撞击的过程中，弹体既有穿透的，也有嵌埋的，还有跳飞的。所以，"侵入"的意义是包括"穿透"、"嵌埋"、"跳飞"等过程的。这里：**穿透**（perforation）指侵入体穿越了靶元；**嵌埋**（embedment）指侵入体在接触了靶元以后，停止（或埋藏）在靶元内部；**跳飞**（ricochet）指弹体既未能穿透靶元，又未嵌埋在靶元内部，而是被靶元反弹回去了。

靶元以其厚度分为下列类型：

（甲）半无限体靶元　当侵入过程不受远方边界表面的影响时，这种靶元可以看作为半无限体靶元。

● 军工界常用侵彻。——编者注

（乙）厚靶元　当侵入体在靶元中通过了相当远的距离后，才感到远方边界表面的影响时，这种靶元可以看作为厚板靶元，或简称厚靶元。

（丙）中厚靶元　当侵入体在靶元中通过时，远方边界表面对侵入全程都有不可忽视的影响。这种靶元可以看作为中等厚度的靶元，或简称中厚靶元。

（丁）薄靶元　当侵入体在靶元中通过时，靶元中的应力和变形沿厚度方向没有梯度，或可以把梯度略去。这种靶元可以看作为薄板靶元，或简称薄靶元。

靶体破坏指靶体中产生了永久变化，它和机能障碍（dysfunction）有别。机能障碍指由于靶体破坏而造成的任一靶体子结构的功能失效。一般说来，靶体破坏总是和弹体侵入过程有关，而靶体机能障碍是由靶体作为整体与其子结构的功能关系所决定的。

§1.3　撞击分类

弹体侵入靶体的现象，可以按各种因素分类。例如：

（一）按撞击时的入射角分类；

（二）按靶体的形状和材料特性分类；

（三）按侵入体的形状和材料特性分类；

（四）按撞击的初速度的范围分类。

其中，由于撞击速度对撞击现象的影响特别明显，而比其它因素的影响突出得多，所以人们通常都采用第四种分类，即以撞击速度的范围分类。

侵入力学或穿甲力学，有许多非军事性的应用。例如：采矿和建筑工程，宇宙飞船的保护设计，核反应堆工程，以及转动机械的设计等。在现在军用目的仍是穿甲力学研究的主要动力时，军用装备无疑是侵入体的主要发射者。所以，简要地叙述这些发射装备的特性，对于侵入速度的分类应是必要的。

最常见的发射装置是常规枪、炮。它们所发射的弹体，都是

在弹体后侧用燃烧的火药气体推进的，离开枪口或炮口的瞬时速度在500～1300米/秒之间。这个射弹的速度范围称为常规军用弹速范围，简称弹速范围。用气枪或其它实验室装置所得的射弹速度，在25～500米/秒之间，称为亚弹速范围。用落锤或其它实验装置所得到的自由落体末端速度，在0～25米/秒之间，那是最低速度范围。弹头散片和其它特种枪、炮的子弹速度，在1300～3000米/秒之间，称为高弹速范围。由于轻气枪装置[1-31],[1-32]，定向爆炸的锥形装药，以及流星体运动中达到的速度，比高弹速范围更高，称为超高速范围。得到超高速的轻气枪装置，是近二十年来的实验室创造，将在下文中介绍。

§1.4 靶元在撞击中发生的现象

另一种区划弹体撞击速度范围的根据，是靶元在撞击中所出现的各种现象。在撞击体的撞击速度很低时，靶元只产生弹性变形，这是某些实验室中实验时经常遇到的低速范围。当撞击体的撞击速度达到某一极限值 v_{EA} 时，不是靶体就是弹体的接触应力达到压缩屈服应力 σ_{YC}。这时靶体或弹体或两者同时产生永久变形，这种变形经常是一种较为复杂的力学过程。现在让我们首先研究弹性撞击的弹性应力和撞击速度的关系。

设有一平头柱形撞击体，以速度 v_E 垂直撞击靶体的某一平面（见图1-1）。撞击体的密度为ρ_P，撞击柱体上的弹性波速为 c_{oP}，它为

$$c_{oP}=\sqrt{E_P/\rho_P} \qquad (1.1)$$

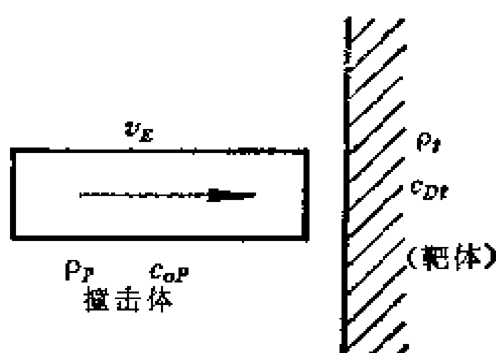


图1-1 平头柱形撞击体撞击靶体

其中 E_P 为撞击体的杨氏模量；靶体中膨胀压缩弹性波的传播速度为 c_{Dt}，它为

$$c_{Dt}=\sqrt{[(\lambda_t+2G_t)/\rho_t]} \qquad (1.2)$$

其中 λ_t 和 $G_t = E_t/2(1+\gamma_t)$ 为靶体的拉梅常数，E_t 和 γ_t 分别为靶体的杨氏模量和泊桑比，ρ_t 为靶体的密度。在弹性撞击后，撞击体和靶体之间的接触应力为 σ_e，相对速度为零。设撞击体的平头由于接触应力 σ_e 的作用而引起的向左方后退速度为 v_1，靶体由于接触应力 σ_e 的作用而引起的向右方后退速度为 v_2。接触面的真实速度为

$$v_E - v_1 = v_2 \tag{1.3}$$

或

$$v_E = v_1 + v_2 \tag{1.3a}$$

根据撞击时的动量冲量守恒定律，设在微小的撞击时间 δt 内，撞击应力波在撞击柱体内向左传播 δx，则有

$$\sigma_e \delta t = \rho_P \delta x v_1 \tag{1.4}$$

但根据定义，

$$\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)_P = c_{oP} \tag{1.5}$$

我们有

$$v_1 = \frac{\sigma_e}{\rho_P c_{oP}} \tag{1.6}$$

同样，从撞击体在接触应力 σ_e 的作用下的动量冲量守恒定律，我们可以证明

$$v_2 = \frac{\sigma_e}{\rho_t c_{Dt}} \tag{1.7}$$

把 (1.6)、(1.7) 代入 (1.3a)，即得

$$v_E = \sigma_e\left(\frac{1}{\rho_P c_{oP}} + \frac{1}{\rho_t c_{Dt}}\right) \tag{1.8}$$

本式表示了撞击速度 v_E 和撞击接触应力 σ_e 的关系，从 (1.6)、(1.7)、(1.8) 中，消去 σ_e，得

$$v_1 = \frac{v_E}{1 + \dfrac{\rho_P c_{oP}}{\rho_t c_{Dt}}} \tag{1.9a}$$

$$v_2 = \frac{v_R}{1 + \frac{\rho_t c_{Dt}}{\rho_p c_{oP}}} \tag{1.9 b}$$

v_1 和 v_2 在实际上分别代表在弹性撞击条件下，在撞击柱体中和在靶体中的撞击波的传播速度。当接触应力等于撞击柱体或靶体的屈服应力 σ_{YC} 时，撞击柱体或靶体中必有一者产生永久变形。和这种屈服应力 σ_{YC} 有关的撞击速度（根据1.8）应该是一种弹性撞击的极限速度 v_{EA}。

$$v_{EA} = \sigma_{YC}\left(\frac{1}{\rho_p c_{oP}} + \frac{1}{\rho_t c_{Dt}}\right) \tag{1.10}$$

这个极限速度 v_{EA} 是霍波金斯（H. G. Hopkins）和柯尔斯基（H. Kolsky）[1-33]首先发现的（1960），戈德斯密司（1962）[1-34]进一步把它推广了，被称为霍-柯氏极限速度。其它形状弹头的弹体，也有类似的极限速度。戈德斯密司（1967）[1-35]从赫兹接触定律导出了球头弹体的极限速度，发现它比（1.10）式的霍-柯氏极限速度低得很多。

在薄板靶元的非穿孔性破坏中，有两种由于塑性变形而造成的横向位移。（一）在撞击弹体头部接触部分，靶元产生和弹头形状完全相同的隆起变形；（二）从直接受撞击的靶元部分，延伸很远的由于靶板弯曲而造成的盘形凹陷变形（见图1-2）

薄板靶元产生非穿孔性的塑性变形的弹体撞击速度 v_P，有上下两个极限，下限即为（1.10）式的霍-柯氏极限速度 v_{EA}，上限为产生靶元流动变形的塑性极限速度 v_{PA}

$$v_{PA} = \sqrt{(\sigma_{Yt}/\rho_t)} \tag{1.11}$$

其中 σ_{Yt} 为靶元的屈服应力，ρ_t 为靶元的密度。亦即有

$$v_{EA} \leqslant v_P \leqslant v_{PA} \tag{1.12}$$

当靶元的厚度提高时，上述靶元的塑性撞击变形就减小，也即是说厚板靶元的挠度很小，塑性撞击变形只能局限于靶元撞击面一边很小的局部，在很厚的靶元上，只能形成撞击面上的一个弹坑。

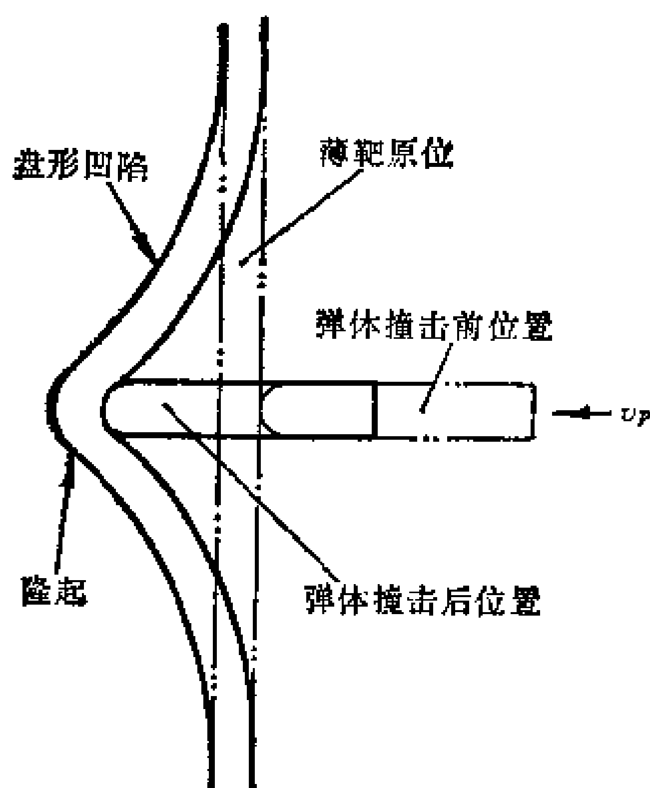


图1-2 薄靶元在塑性撞击速度 v_P 撞击后产生的塑性变形

靶体在各种速度的弹体撞击中经历各种现象，它们包括弹性波、塑性波、流动波的传播，还有摩擦生热等产生的局部变形和整体变形。流动是在撞击速度达到 $v_{P\Lambda}$ 以后开始的，一般认为当撞击速度达到以材料的压缩体积模量 K_t 有关的传播波速 $v_{H\Lambda}$ 以后，就产生根本性变化，即产生流动变形的撞击速度 v_H 在 $v_{P\Lambda}$ 和 $v_{H\Lambda}$ 之间，

$$v_{P\Lambda} \leqslant v_H \leqslant v_{H\Lambda} \tag{1.13}$$

其中 $v_{P\Lambda}$ 为塑性变形极限速度（1.11），$v_{H\Lambda}$ 为流动变形极限速度，

$$v_{H\Lambda} = \sqrt{(k_t/\rho_t)} \tag{1.14}$$

当撞击速度超过 $v_{H\Lambda}$ 以后，固体的可压缩性相对减弱，即变形速度超过了固体中压缩波的传播速度，从而在固体中形成激波。但是人们对激波形成后的撞击现象研究得不多。在比它更高的撞击速度打击下，即约在 $3v_{H\Lambda}$ 的撞击速度打击下，人们观察到了粉碎(comminution)、相变、气化，甚至撞击爆炸等现象[1-36],[1-37]。

对于薄靶元和中厚靶元而言，断裂破坏的后果是造成穿孔。

这些破坏由于材料特性、几何形状、以及撞击速度的不同而各有特点。最常见的破坏形状见图1-3。包括初始压缩波造成的背侧断裂破坏；脆性靶板在初始压缩波后造成的径向断裂破坏；脆注靶板的层裂（spalling）型、痂斑（scabbing）型、挤凿（plugging）型、正面或背面的花瓣（petaling）型和碎块（fragmentation）型的各种破坏[1-15,1-28,1-38,1-39,1-40]；及韧性靶板的孔口扩展破坏。

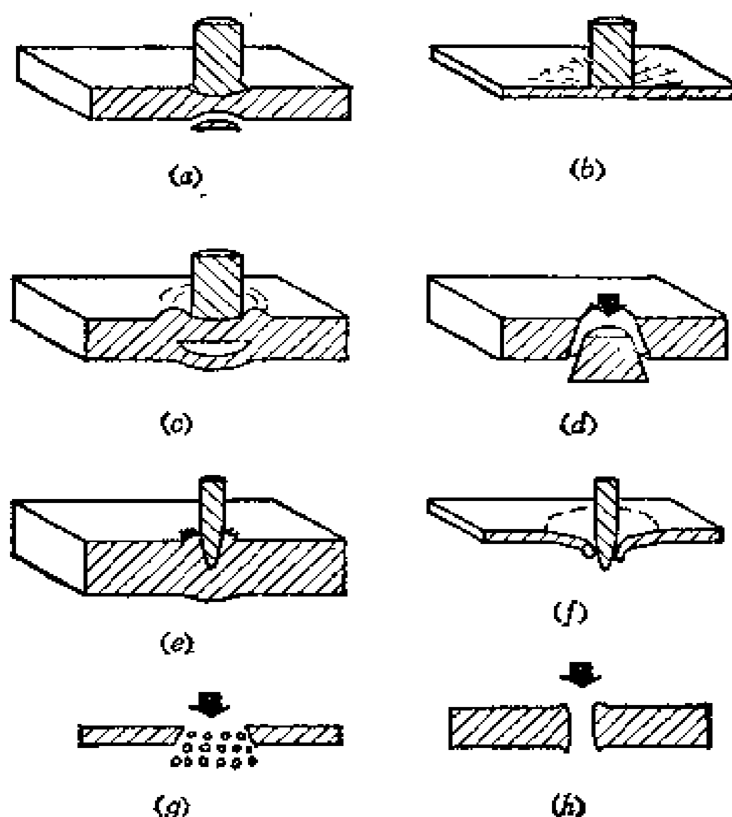


图1-3 穿孔破坏的形状

（a）初始压缩波造成的背侧断裂破坏；
（b）脆性靶板的初始压缩波后造成的径向断裂破坏；
（c）脆性靶板的层裂型或痂斑型破坏；
（d）脆性靶板的挤凿型破坏；
（e）脆性靶板的正面花瓣型破坏；
（f）脆性靶板的背面花瓣型破坏；
（g）脆性靶板的碎块型破坏；
（h）韧性靶板的孔口扩展型破坏。

初始应力波的应力大于极限压缩强度 σ_{yd} 时，低强度和低密度材料的靶板会发生断裂破坏（见图1-3 *a*）。对于拉伸强度低于压缩强度的靶板材料如陶瓷，在撞击中，初始应力波之后会出现径向断裂破坏（图1-3 *b*）。层裂型破坏是由于当压缩波在外侧表面反射后产生的材料拉伸破坏而造成的，在爆炸、加载中常常发生这类破坏（图1-3 *c*）。挤斑型破坏的情况与层裂型破坏类似，但出现的地区往往由材料的局部不均匀性，或在压延成型中所遗留的各向异性特性所造成的（图1-3 *c*）。挤凿型破坏是弹体把靶板中大小和弹体截面差不多的一块挤凿出去造成的，当弹体挤压这块靶板时，它和靶板主体相连接的环形截面上产生很大的剪应力。由此突然产生的剪应变发出热量，在短暂的撞击过程中这些热量来不及逸散，从而大大提高了局部环形区域的温度，降低了材料的抗剪强度，以致出现挤凿型破坏。这是一个近似绝热剪断过程。脆性薄板或中厚板受到钝头弹体撞击时，最易发生挤凿破坏。它和撞击速度以及钝头弹体的撞击角有密切关系(图1-3 *d*)。

花瓣型的卷边破坏，是在侵入体四周的靶板上，当初始应力波过去后产生的环向和径向的高值拉伸应力所造成的。撞击体向前运动时，先把靶元的材料推向前去，从面造成靶板的弯曲，形成靶板中的弯曲应力，再加上靶板材料中存在的不均匀性，在其弱点上，这种弯曲应力就造成花瓣型的卷边破坏（图1-3 *e*）。当尖拱形或锥形弹头的子弹在较低的撞击速度射向薄板时，最易出现这种破坏。当钝头弹体在破坏极限速度附近撞击薄靶板，也能出现这种破坏。花瓣型破坏总是伴随着产生较大的塑性流动变形和板的永久的弯曲变形。如果弹体的撞击速度较大，靶板背面的隆起部分进一步受到弹体的推动，而发生进一步的变形。最后，隆起部分的拉伸应力超过材料的拉伸强度，在弹体顶端四周产生星形裂缝，弹头钻出了靶板背侧，靶板再也挡不住弹体的前冲运动了；而靶板的其余部分的拉伸应力把业经穿孔的边缘拉住，造成背面的花瓣型卷边破坏（图1-3 *f*）。硬度中等或较低的厚板，穿孔破坏时兼有韧性破坏和层裂破坏的特性。除了靶元的破坏外，

弹体也会产生象塑性变形、粉碎[1-33]、弹壳炸裂、或部分机能故障等损坏。当然，由于靶元破裂或弹体破裂所散射的残块，碰到其它靶元时，仍应把它们当作是一种侵入体。如果弹体穿透了靶元后，未受损坏而保持原样，则人们对于这样的弹体在穿透后的运动，同样是有兴趣的。

图 1-4 是钢球用越来越高的速度撞击2024铝合金板所得破坏情况的切面相片的描绘图。

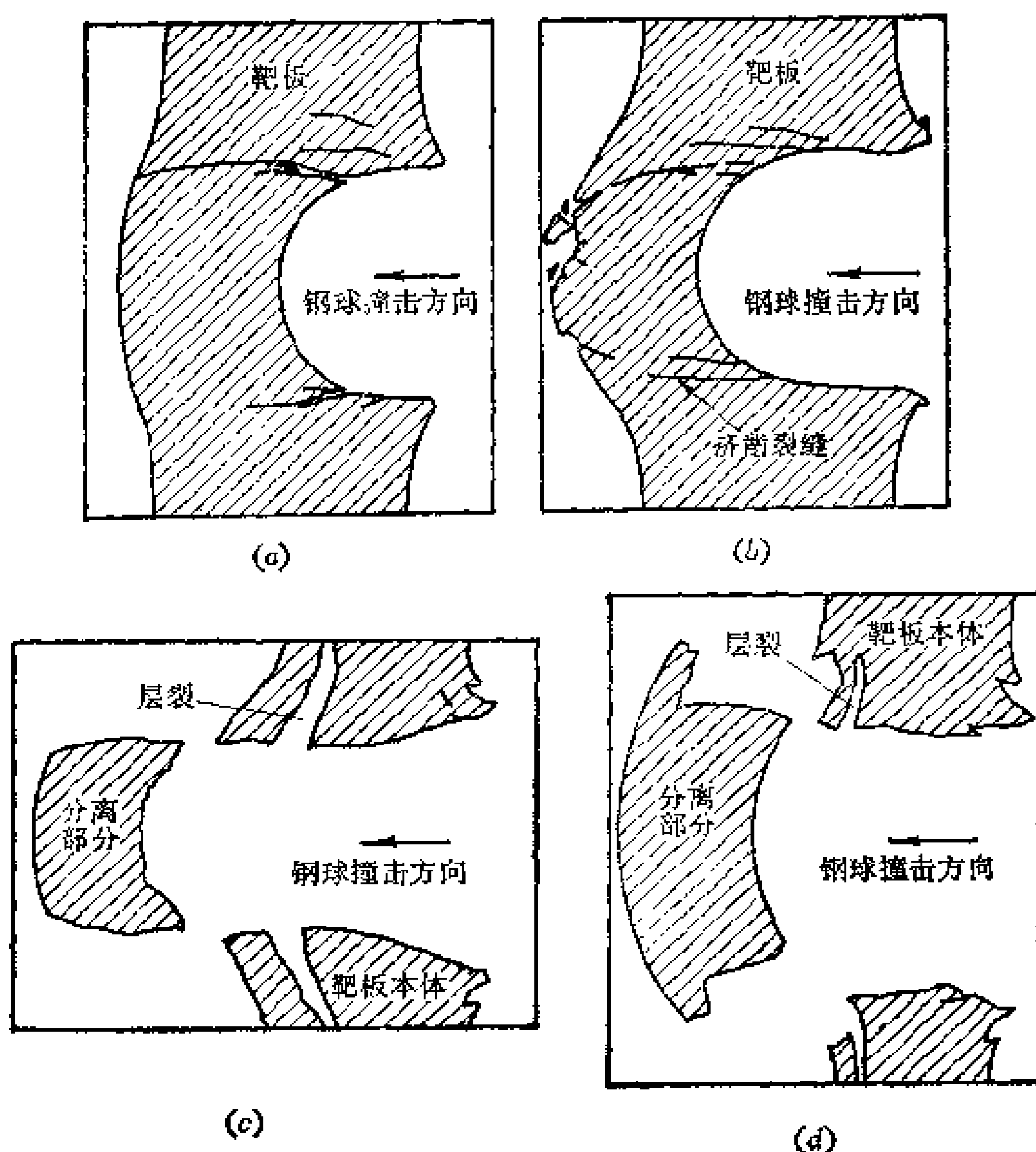


图1-4　钢球撞击2024铝合金板所得破坏的切面相片的描绘图

(a) 挤凿破坏的早期状态；(b) 挤凿破坏的成熟状态；(c) 挤凿和层破裂坏的伴生状态之一；(d) 挤凿和层裂破坏的伴生状态之二。

这些相片原图见柏刻曼和戈德斯密司的综合报告[1-16]。第一图（a）是挤凿破坏的早期情况，有人指出，钢球的挤凿路径是一种螺旋形的路径[1-38,1-41]。（b）代表挤凿过程已经完成了大部分，靶板上出现了一个较大的隆起。而且隆起部分中已发生挤凿裂缝，形成挤凿型的破坏。（c）是既有挤凿又有层裂的破坏，挤凿出的部分业已脱离靶板主体。（d）是比较成熟的挤凿和层裂破坏。最后两图的情况是不常见的，但它们的确表示挤凿和层裂破坏是可以伴生的破坏。

图 1-5 是钢球各以30°和60°角向铝合金板斜射所产生的撞击破坏[1-16]。

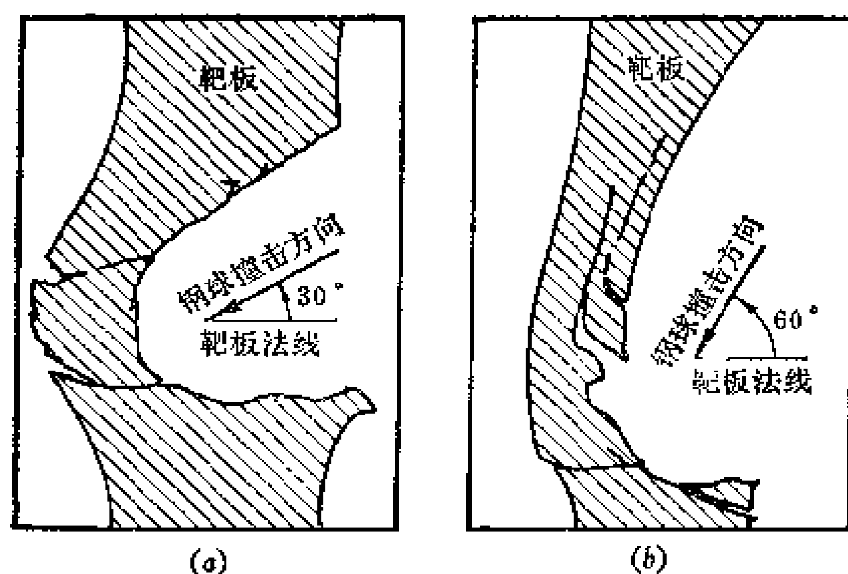


图1-5 钢球斜撞铝合金板的挤凿破坏
（a）以30°角斜击；（b）以60°角斜击。

（a）图是一种挤凿型的破坏，而（b）图则在挤凿过程中形成了一种象绞链似的裂缝。

晚近，由于高速照相技术和激光测量技术的发展，我们有可能用电子计算机来模拟撞击过程的实际情况，并用以分析穿透靶元的实际机理。加里福尼亚大学劳仑兹实验室的韦京斯（M. L. Wilkins），曾在1975年公布了美国国防高级研究计划机构主持的轻甲计划的材料[1-42]。

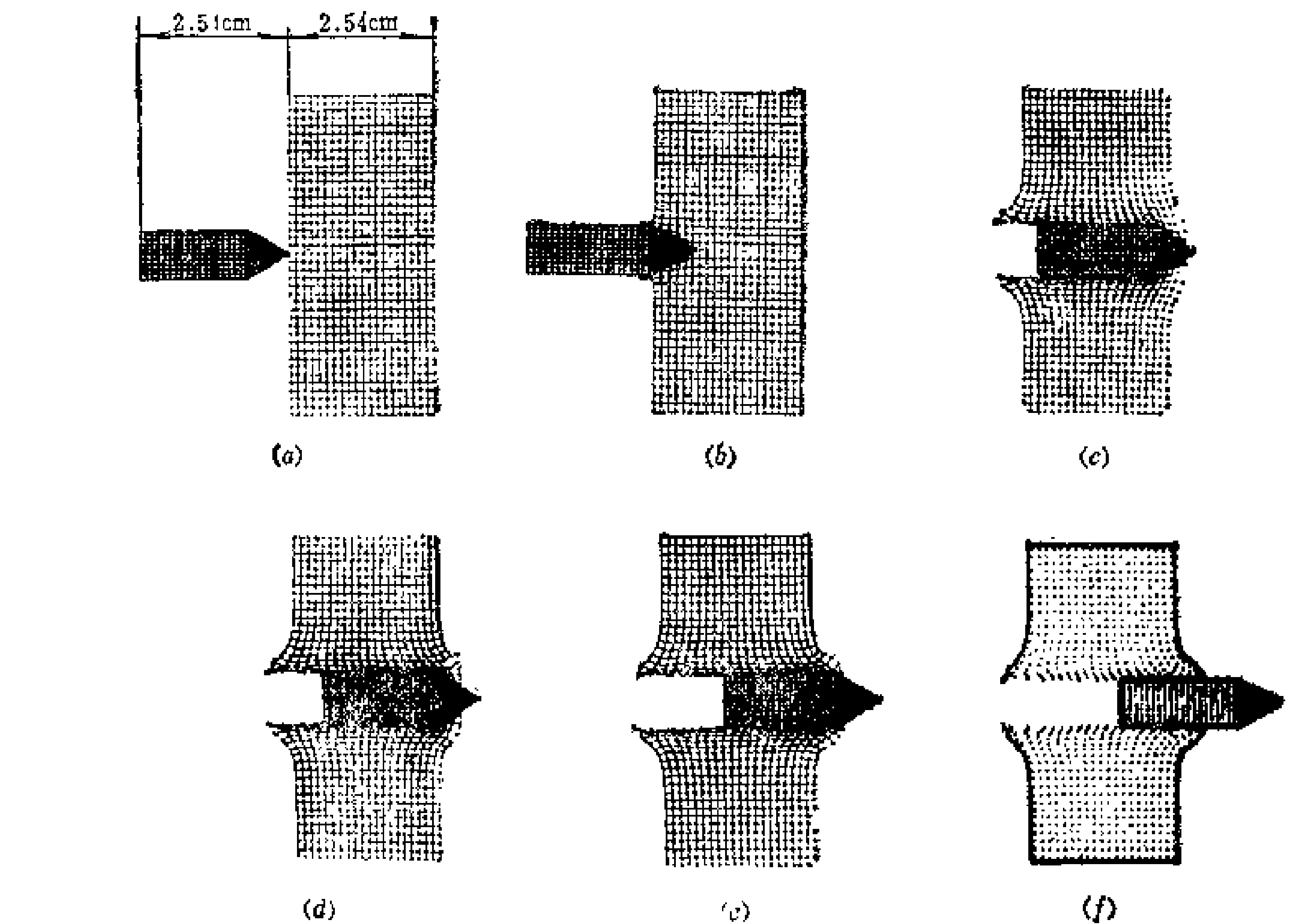


图1-6　尖头钢弹钻入和穿透铝板的过程

(a) $t=0$ 微秒；(b) $t=8$ 微秒；(c) $t=40$ 微秒；(d) $t=48$ 微秒；(e) $t=50$ 微秒；(f) $t=66$ 微秒。

第一个实验是关于尖头钢弹钻入和穿过铝板的过程[1-42]。钢弹头为锥形、长2.54厘米（1英寸），铝板的材料为6061-T6合金铝、厚2.54厘米（1英寸），弹体截面直径为0.635厘米，撞击速度为0.084厘米/微秒，或84米/秒。钢的强度远远超过铝的强度。我们可以假定钢弹的变形很小而略去不计，尖头钢弹在穿透靶板过程中，也不会有什么变钝的明显变化，钢弹只用了80微秒就穿过了铝板。图 1-6 即钢弹穿过铝板全过程的各个环节[1-42]。尖头钢弹钻进铝板时，主要克服铝板的抗剪强度，钢弹把铝挤向四周。如果我们用铝的拉伸试验所得结果计算抗剪强度，则计算所得的穿透时间和实验测得的穿透时间一样。如果改变铝的抗剪强度的计算用值，则计算所得的穿透时间就不同于实验值，他也用软钢或低碳进行试验，结果相同。这就指出：只要尖头弹体的强度远

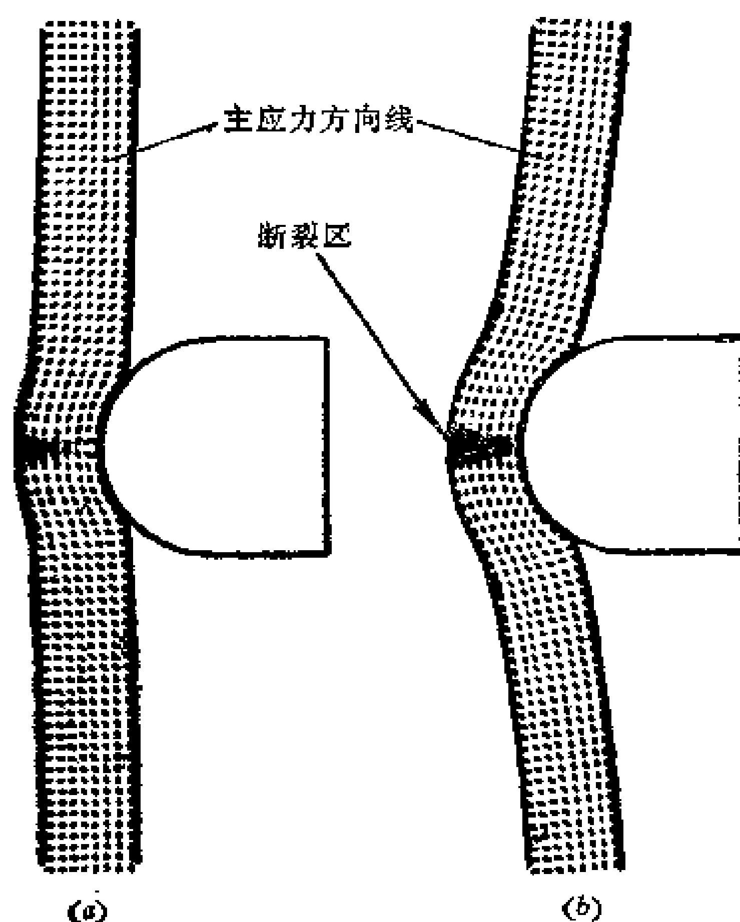


图1-7　球头钢弹撞击铝合金薄板

（a）t =23.94微秒；（b）t =84.81微秒。

远超过靶板的强度，在钻入和穿透过程中弹体基本不变形。那么，抗剪强度是这个撞击系统的控制因素，我们完全有可能从已知的靶板材料的抗剪强度，预测撞击穿透的全过程。

第二个试验，是球头钢弹撞击铝合金的薄靶极。靶板是在离撞击点很远的地方支承的。计算中看到撞击时在撞击点上产生很大的箍紧应力。在撞击点的背侧箍紧应力最大，当其超过靶板材料的抗拉强度时开始产生断裂。这种断裂沿靶板的厚度方面发展，造成背面的花瓣型的破坏[1-42]。破坏过程见图1-7。

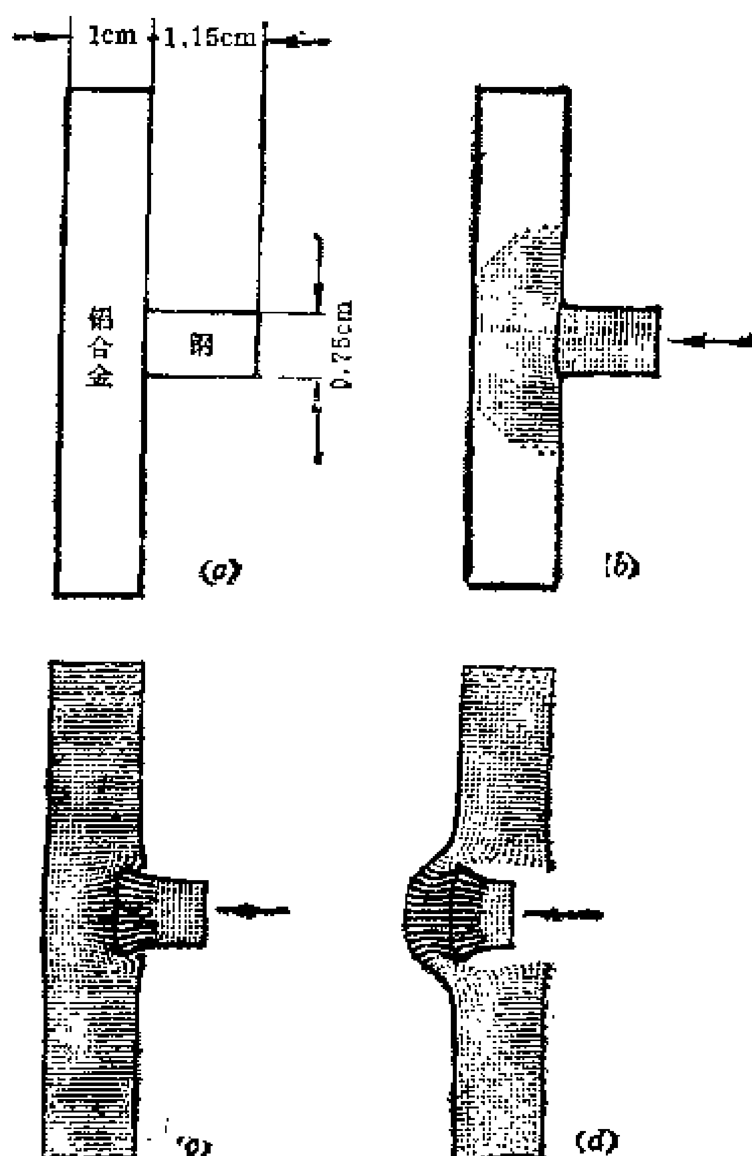


图1-8　平头钢弹体撞击铝合金板的挤凿过程（撞击速度为90米/秒）
（a）$t=0$微秒；（b）$t=1.025$微秒；（c）$t=5.017$微秒；
（d）$t=22.501$微秒。

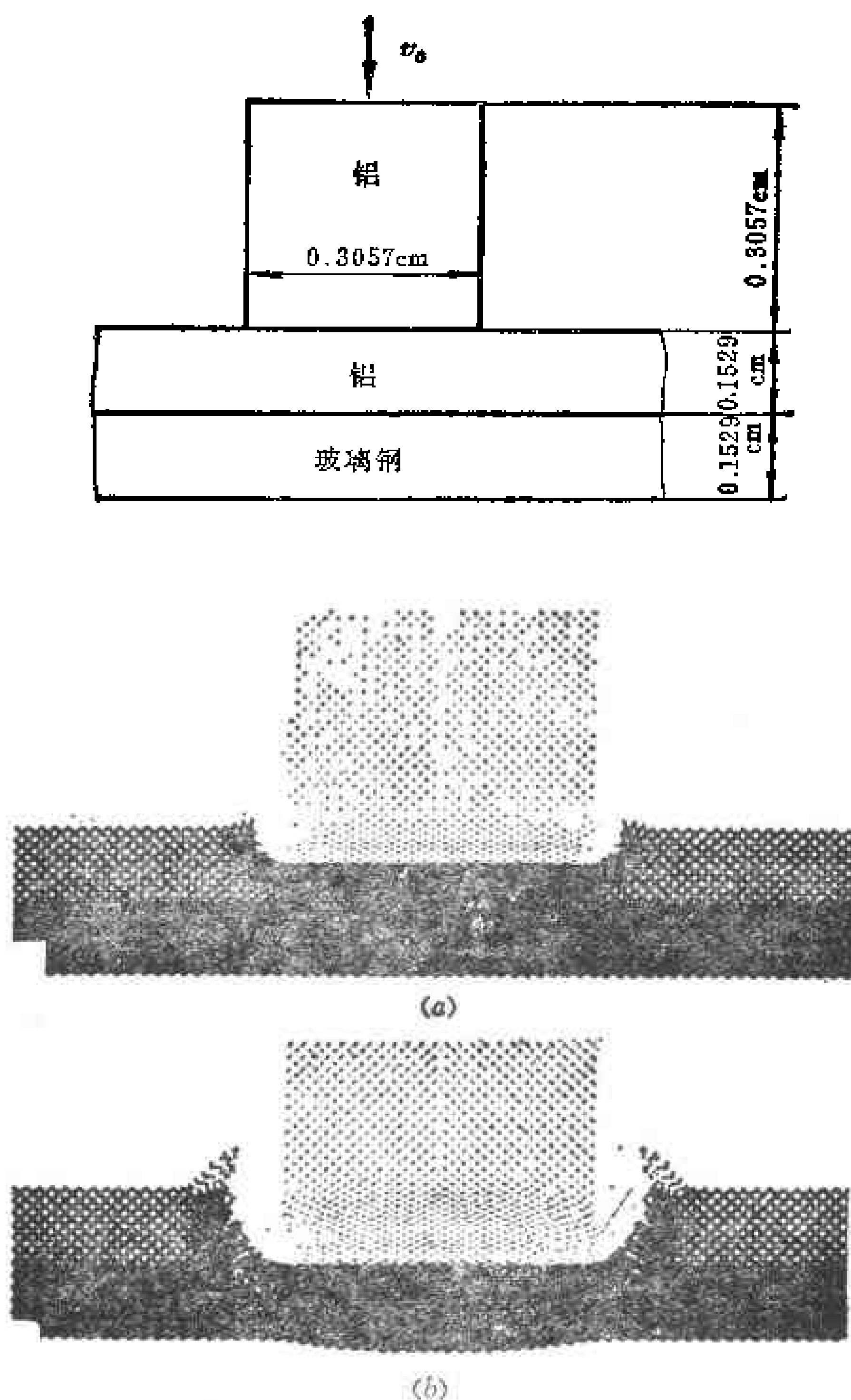


图1-9 平头铝弹撞击铝-玻璃钢靶板的模拟实验

(撞击速度v_0=1.5厘米/微秒)

(a) t=0.05微秒；(b) t=0.1微秒。

第三个试验是平头弹体（钢）撞击铝合金板的侵入过程[1-42]。对于这种情况而言，平头弹体四周的靶板部分，在弹体侵入靶体时发生很大的应变。当这种应变超过铝的许可应变时，铝材料在该处发生断裂。当侵入时，弹体正前方的靶体部分单独抵挡弹体的撞击，在这部分四周（即弹体平头四周边缘的接触面上）发生很高应力，从而在那里产生断裂，造成整块材料脱离靶板主体的挤凿破坏。前面业已讲过，由于撞击过程进展很快，局部断裂产生的热不能及时散出，所以这种绝热剪断过程使这部分材料急速增温，从而降低该处的抗剪强度，加速了挤凿破坏过程（见图1-8）。

对于弹体和靶体是相同材料制成的系统，也有上述三种撞击破坏情况。当然，在这种情况下，弹体一般将历经很大的变形。例如棱纳（T. D. Riney，1970）[1-43]曾研究了铝合金的平头弹体对铝-玻璃钢组成的双层靶板进行撞击的实验和计算（见图1-9）。

§1.5 撞击相图

从上面的讨论中可以看到，弹体和靶体撞击以后的现象，和下列因素有关：

（1）撞击速度和撞击角度（即入射方向和法线的夹角）；

（2）弹体的形状和尺寸；

（3）靶体的厚度；

（4）弹体的材料性能（其强度，包括抗拉和抗剪强度，以及密度）；

（5）靶体的材料性能（其抗拉和抗剪强度，以及密度）。

人们在研究本题时，一般关心弹体在撞击以后的情况。一般弹体在撞击后有三种运动形式：

（1）嵌埋；

（2）穿透；

（3）跳飞。

一般弹体在撞击后的形状有三种可能性：

（1）保持完整并原有形状，称为完整；

（2）形状发生较大变化，称为变形；

（3）破裂成二块以上的散块，称为碎裂。

因此，弹体在撞击后有九种可能形态（见图1-10）。有时人们把碎裂细分为两类，一类称为碎裂（即碎裂为两三块），另一类为粉碎（即碎裂为许多块粒）。其实变形和碎裂在多数情况下已经使子弹失效。有时人们把大变形和碎裂统称为破坏。

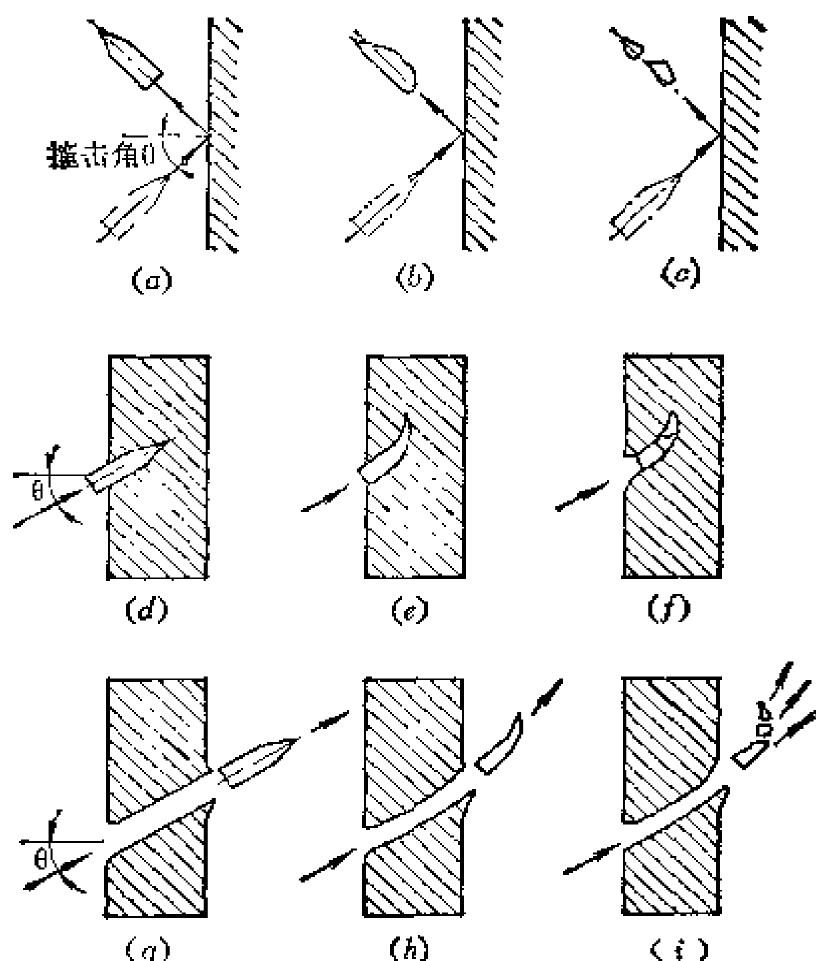


图1-10　弹体撞击后的九种可能形态

（a）完整跳飞；（b）变形跳飞；（c）碎裂跳飞；
（d）完整嵌埋；（e）变形嵌埋；（f）碎裂嵌埋；
（g）完整穿透；（h）变形穿透；（i）碎裂穿透。

还有一个在军用装甲上很重要的术语，即弹道极限（Ballistic Limit），它在末端弹道学中，是指装甲生效的撞击速度。这是一个意义不很明确的量。例如，美国空军飞行动力实验室的报

告(1976)[1-44]曾谈过这个术语的定义，它说：

“弹道极限——是下列两种撞击速度的平均值，一种是部分侵入靶板的最高速度，另一种是完全穿透的最低速度。人们历来对装甲或其它材料防止穿透的能力，有各种各样的定额度量，其最广泛应用的有三种：（1）陆军极限；（2）‘防御’极限；（3）海军极限。其根本差别是由穿透定义的不同所引起的(见图1-11)。过去，人们分别用陆军和海军的定义，但在目前，越来越多的人用‘防御’极限的定义”。

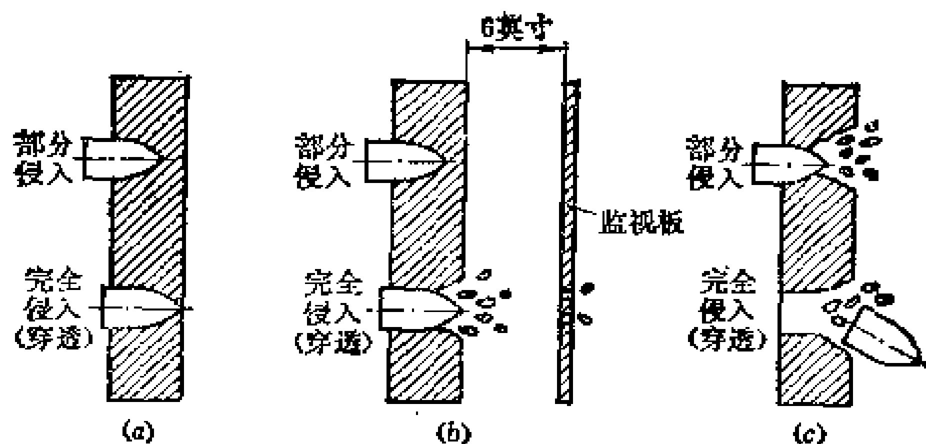


图1-11 弹道极限的三种穿透和部分侵入的定义

(a) 陆军弹道极限；(b) “防御”弹道极限；(c) 海军弹道极限。

对于指定材料和尺寸形状的弹体，撞击指定材料和厚度的靶板所得的撞击后的弹体状态，必为撞击速度 v_0 和撞击角 θ 所决定的。在不同撞击速度 v_0 和撞击角 θ 下的弹体，其撞击后的状态的图示，称之为撞击相图。在金属学中，在不同成分和不同温度下的金属相的图示，也称相图。这两种相图在形式上很相象。但不能混为一事。

图 1-12 为卵形弹头的小钢弹射击 0.635 厘米厚的 2024-T3 铝合金靶板得到的撞击相图。这个图是根据实验数据和理论结果制定的[1-45]。图中有不少曲线，它们代表末端弹道诸相间的交界线。弹道极限曲线很重要，它代表了弹体在射击时的主要特性。弹道极限曲线，是可以根据大量的实验数据决定的。撞击速度小于 200 米/秒的实验是很多的。撞击角从 0 度到30度或到 60 度之

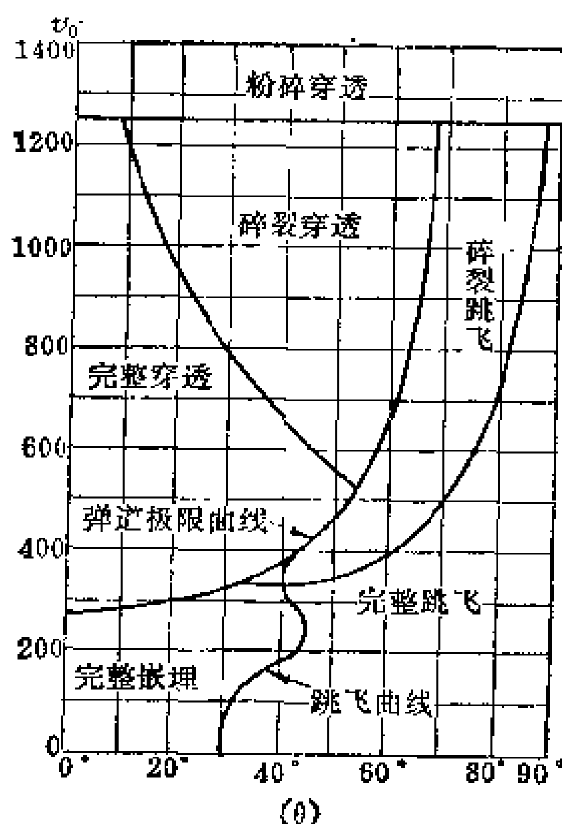


图1-12　0.635厘米直径的卵形弹头钢弹射击6.35毫米厚的2024-T3铝合金靶板得到的撞击相图

间的数据，一般是可靠的，因此其弹道曲线也是可靠的。其它曲线就差一些，甚至有些曲线充其量只能算是根据理论推测的。

从相图可以看到，在弹体设计中，对于特定的靶板而言，撞击速度 v_0 和撞击角 θ 确能用来表示特定弹体的撞击状态。所以，我们可以利用撞击相图来设计或选择弹体，以射击特定的装甲。也就是说，在军工中，撞击相图是用来设计或选用射击特定装甲用的弹体的。

反之，对于特定的弹体而言，设计靶板厚度以防御弹体的射击破坏时，这种撞击相图就不很方便。为此，我们用另一种设计靶体用的撞击相图，它们是在指定靶板材料和指定弹体体型和材料下，用垂直撞击（即撞击角为零）的弹道极限速度和靶板厚度 h_0 对弹体截直径 D 的比值 h_0/D 作为两种坐标的撞击相图（见图1-13）。

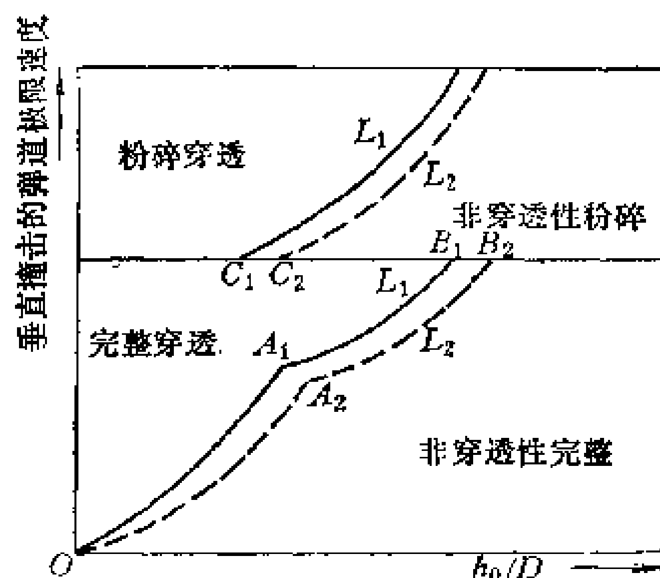


图1-13　设计靶体用撞击相图

图中的 L_1、L_2 均表示弹体总长，而且 $L_1<L_2$。当弹体长 L 较大时，同样 D 值的弹体重量就较重，于是相同撞击速度的弹体动量较大，可以穿透较大厚度的靶板。所以，L_2 曲线在 L_1 曲线的右侧，也即是说对于较长的弹体，在防御中要用较厚的靶板，这是合乎常识的。

从图1-6、1-7、1-8中可以看到，弹体穿透靶板的机理，是靶板的弯曲断裂和挤凿破坏的联合作用。当 h_0/D 较大时，弯曲很小，主要是弹体撞击而产生的应力超过了材料的抗剪强度而形成的挤凿破坏，即曲线 A_1B_1 或 A_2B_2。当 h_0/D 较小时，弯曲很大，穿透破坏主要是由于靶板背面的弯曲应力超过材料抗拉强度而产生的拉伸断裂形成的，这种破坏经常是花瓣型破坏如图1-13（即曲线 OA_1 或 OA_2）。当 h_0/D 不大不小时，有一点（A_1 或 A_2），代表两种不同机理破坏的交替点。粉碎后，颗粒小了，穿透能力减小，所以弹道极限曲线左移。

我们还必须指出，对于半无限靶体而言，并无穿透破坏一事，所以在撞击相图中并无弹道极限曲线，但跳飞曲线还是存在的。

§1.6　理论处理方法

侵入和穿透是非常复杂而又难以处理的问题。严格的理论分析涉及撞击体和靶体的几何形状和尺寸，它们的弹塑性性质、激

波的传播、流动、有限变形和应变、应变率、加工硬化、热性质、摩擦效应、以及断裂的发生和传播等。难怪长期以来，人们主要是依靠大量试验研究来处理这些问题的。

从加俐略（Galileo）起，人们就注意到固体的静力性能和动力性能是不同的。长期以来，人们知道弹体侵入及穿透靶板和撞击速度有密切关系。经过大量的实验和理论研究，人们已经初步把撞击速度和应变率的大小和物质材料的运动特点联系了起来。为在实验中获得各种撞击速度，人们设计了许多射击设备。表 1-1 为一些撞击实验的简单说明。

表1-1　固体材料的撞击反映

应变率	撞击速度	撞击效果	载荷方法
10^8/秒	>12千米/秒（超高速）	固体材料气化	爆炸加速
10^7/秒	3～12千米/秒（超高速）	不能略去材料压缩性的流体力学流动	爆炸加速
10^6/秒			
10^5/秒	1.3～3千米/秒（高弹速）	材料呈现流动性的流态，压力接近或超过材料强度，主要参数为材料密度	枪炮，轻气枪
10^4/秒	500～1300米/秒（弹速）	粘性，材料强度是显著的	枪炮
10^3/秒			
10^2/秒	25～500米/秒（亚弹速）	基本上是塑性	机械方法，压缩空气枪
10^1/秒			
10^0/秒			
10^{-1}/秒	<25米/秒（最低速）	基本上是弹性，有些局部塑性	机械方法，压缩空气枪

一般军用枪炮的撞击速度在$0.5\leqslant v_0\leqslant 2.0$千米/秒之间，在实验室内都能用不装火药的撞击体达到。这种弹体有时称为动能弹体（Kinetic Energy Projectile）或惯性弹体。这是研究得最多的弹体靶板系统。这种撞击速度范围，有时称为中常速度范围。比这个速度低的，称为低速撞击或低速接触问题；比这个速度高的，称为超高速撞击。关于这一点在§1.3中业已谈到了。

对于撞击侵入和穿透现象有下列三类理论处理方法：

（1）**经验法或半分析法**

把大量实验数据用量纲分析法和相似理论联系起来，再寻找合理的代数方程来表达其关系。为了满足特定的设计目的，人们常常把在不同材料和弹体、靶体的不同构造尺寸下所得的大量实验数据，用这些无量纲量联系起来，建立经验代数式，以指导将来的实验和提供设计之用。一般说来，这种方法并不增加我们对本问题物理性质的理解。但是反过来说，如果我们对侵入和穿透问题的物理本质有较深入的理解，则经验法常常会给我们很简单的设计根据。里希脱[1-12,1-46]（1972、1973）曾对此进行了一次比较完备的总结。柏克尔（W. E. Baker）等[1-47]（1973）也曾在《工程动力学中的相似方法》中，以第八章一整章的篇幅讲述了穿甲力学中的相似方法。早期的穿甲力学都用本法。

（2）**分析方法**

研究穿甲力学时，不可避免地要使用全部连续介质物理方程，其中最复杂的常常是材料的本构方程。这些方程往往是非线性的，用分析方法进行积分求解几乎是不可能的。人们往往集中研究某一种现象（例如：挤凿、层裂、花瓣型破坏、弹坑形成等），针对这种现象的特点引入简化假定，从而把微分方程化为一维或二维的，以便求解。在这种分析中，经常把弹体或靶体当作是刚性的，运用动量守恒或能量守恒定律，甚或两者都用。只有很少数的论文，采用弹体或靶体都能变形的假设。再者，几乎所有分析都采用了一些附加的经验结论，或采用一些尚待测定的物质材料参量。第二次大战以来，已经有不少工作是属于这一方面的。

（3）**数值解法**

为了求得撞击问题或穿甲问题的全部答案，人们一定得依靠数值解法求解本问题的全部连续介质物理方程。用有限差分法和有限元法，在现代电子计算机的帮助下，数值解在六十年代后期到七十年代中已全部实现了，而且能正确处理撞击破坏中的过渡过程现象。虽然这种方法仍是近似的（这里用了微分方程的离散化

后的代数方程)，但是到目前为止，在离散化过程中引入的计算误差，远没有对材料性质估算所引入的误差大。

在二三百年前，欧拉(L. Euler)[1-48]和鲁滨斯(B. Robins)[1-49]就曾研究过穿甲的经验关系。在十九世纪，马推尔(E. Martel 1897)[1-50]研究过挤凿模型。一直到1935，葛皮爱(M. L. Gabeaud)[1-51]首先提出了穿透靶板的多种机理的联合作用观点。同时期，渥毕克(E. Öpik)[1-52]使用了流体力学观点研究了半无限靶体上弹坑形成的理论。在1960年左右，皮约克[1-53]和韦京斯[1-54]，分别利用计算机发展了二维的欧拉坐标和拉格朗日坐标中研究弹体靶体系统的撞击问题。最近才有人[1-55,1-56]用这种计算机的数值方法处理了撞击的三维问题，例如斜撞的问题。在目前，人们仍在上述这三个领域中努力探索，研究中所使用的实验设备越来越复杂了，所使用的理论模型经常是复杂的多机理破坏模型，和更复杂的本构方程以及破坏准则。

参考文献

〔1-1〕 J. V. Poncelet, Cours de Mécanique Industrielle, Paris (1829/1835).

〔1-2〕 F. Bahsforth, Motion of Projectile, Asher, London (1873).

〔1-3〕 F. Helie, Traite de Balistique Experimentalle, Dumaine, Paris (1940).

〔1-4〕 F. Krupp, Uber das Durchschlagen von Panzerplatten, Essen (1883, 1890).

〔1-5〕 H. P. Robertson, Terminal Ballistics, National Research Council, Washington (1941).

〔1-6〕 Office of Scientific Research and Development, National Defense Research Committe, Division 2, Summary of Technical Reports of Division 2, NDRC, Vol. 1, Columbia Press, NewYork (1946).

〔1-7〕 R. Sutterlin, Sciences et Techniques de 1' Armement, Memorial de 1' Artillerie francaise, 40, 569, 850 (1966); 41, 12 (1967).

〔1-8〕 L. E. Fugelso, A. A. Arentz, JR., and J. J. Poczatek, Report No. 1127, AD272-947, American Machine and Foundary Co., Alexandria Virginia, U. S. A (1961).

〔1-9〕 L. E. Fugelso, A. A. Arentz, JR., Report No. MR 1127, AD 421-590, General American Transportation Co., Niles, Illinois (1962).

〔1-10〕 Naval Weapons Laboratory, NWL No. 1864, NAVWEPS No. 8331

(1968).

[1-11] M. Duforneaux, Sciences et Techniques de l'Armement, Memorial de l' Artillerie française, 45, 645(1971).

[1-12] R. F. Recht, Quasi Empirical Models of the Penetration Process, Denver Research Institute, University of Denver(1972).

[1-13] A. I. O. Zaid, A. El-kalay and F. W. Travis, International journal of Mechanical sciences, 15, 129(1973).

[1-14] M. E. Backman, Terminal Ballistics, NWC TP 5780, Naval Weapons Center, China Lake, California (1976).

[1-15] W. Goldsmith, Sciences et Techniques de l' Armement, Memorial de l'Artillerie francaise, 48, 849 (1974).

[1-16] M. E. Backman amd W. Goldsmith, The Mechanics of Penetration of Projectiles into targets. International Journal of Engineering Science, 16(1), 1-108 (1978).

[1-17] Special Issue, Penetration Mechanics, International Journal of Engineering Science, 16(11), 793-917 (1978).

[1-18] (1) Proc. 1st Hypervelocity and Impact Effects Symp., Santa Monica, California(1955).

(2) Rroc. 2nd Hypervelocity and Impact Effects Symp., Washington, D. C., (1957).

(3) Proc. 3rd Symp. on Hypervelocity Impact, Chicago, Illinois (1959).

(4) Proc. 4th Symp. on Hypervelocity Impact, Eglin AFB, Florida (1960).

(5) Proc. 5th Symp. on Hypervelocity Impact, Denver, Colorado (1961).

(6) Proc. 6th Symp. on Hypervelocity Impact, Cleveland, Ohio (1963).

(7) Proc. 7th Hypervelocity Impact Symp., Tampa, Florida(1965).

(8) Proc. AIAA Hypervelocity Impact Conference, Cincinnati, Ohio (1969).

[1-19] W. Herrmann and A. H. Jones, ASRL Report No. 99-1, Massachusetts Institute of Technology, Aeroelastic and Structural Research Laboratory (1962).

[1-20] R. C. Bjork, Report No. RM 3529 PR, AD 413-070, Rand Corp., Santa Monica, California (1963).

[1-21] D. R. Christman, J. W. Gehring, C. J. Maiden and A. B. Wenzel, Technical Report 63-216, General Motor, Defense Research Laboratories, Santa Barbara, California (1963).

[1-22] C. J. Maiden, TM. 63-203, General motor, Defense Research Laboratories, Santa Barbara, California(1963).

[1-23] NASA George C. Marshall Flight Centre, Report No. MDWG-63-2, DDC 507350, Huntsvill, Alabama (1963).

[1-24] G. B. Clark, C. J. Haas, J. W. Brown and C. D. Muir, Contract No. DC7-35511, Rock, Mechanics and Explosives Research Center, University of Missouria, Rolla, Missouria(1968).

[1-25] R. Kinslow (editor), High Velocity Impact Phenomena, Academic Press, New York (1970).

[1-26] Wright-Patterson Air Force Base, Proc. Symp. Structural Dynamics under High Velocity Impulse Loading, ASD-TDR-63-140, Aeronautical System Division, Dir/Aeromechanics, Flight Dynamics Laboratory (1963).

[1-27] Army Materials and Mechanics Research Center, Proc. Army Symp. Solid Mechanics, 1972, AMMRCMS 73-2, Watertown, Massachusetts (1973).

[1-28] W. Goldsmith, Impact, Arnold, New York(1960).

[1-29] N. Cristescu, Dynamic Plasticity, North-Holland (1967).

[1-30] W. Johnson, Impact Strength of Materials, Arnold, New York(1970).

[1-31] A. J. Cable, In'High Velocity Impact Pheromena', pp 1-22, Academic Press, New York(1970).

[1-32] C. L. Lecomte, In'Kurzzeitphysik' (High Speed Physics) pp. 693-718, Springer-Verlag, Berlin (1967).

[1-33] H. G. Hopkins and H. Kolsky, In'Proc. 4th Hypervelocity Impact Symp'. APGC-TR-60-39, Vol. 1 (1960).

[1-34] W. Goldsmith, NAVWEPS Report 7812, NOTS TP 2811, U. S. Naval Ordnance Test Station, China Lake, California (1962).

[1-35] W. Goldsmith, In 'Kurzzeitphysik' (High Speed Physics), pp. 620-658, Springer Verlag (1967).

[1-36] M. A. Cook, Journal of Applied Physics, 20, 725 (1959).

[1-37] A. E. Olshaker and R. L. Bjork, Proc. 5 th Symp. on Hypervelocity Impact, Vol. I, Part I, pp 225-239 (1962).

[1-38] J. S. Rinehart and J. Pearson, Behavior of Metals under Impulsive Loads, Dover, New York (1965).

[1-39] L. E. Fugelso and F. H. Bloedow, DDC. AD 636 224 (1964).

[1-40] R. T. Sedgwick, Technical Report, AFATL-TR-68-61, Air Force Armament Laboratory, Eglin Air Force Base (1968)

[1-41] R. F. Rolsten and B. J. Lairmore, Journal of Applied Physics, 17, 983 (1976).

[1-42] Mark L. Wilkins, Mechanics of Penetration and Perforation, Interna-

tional Journal of Engineering Sciences, 16, pp. 793-807 (1978).

[1-43] T. D. Riney, Numerical Evaluation of Hypervelocity Impact Phenomena, High-Velocity Impact Phenomena edited by R. Kinslow, pp. 157-212, Academic Press, New York (1970).

[1-44] Air Force Flight Dynamics Laboratory, Technical Report, JTCG/AS-74-D-002, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio (1976).

[1-45] M. E. Backman and S. A. Finnegan, Technical Report, TP 5844, U. S. Naval Weapons Center, China Lake, California (1976).

[1-46] R. F. Recht, In JTCG/ME Working Party for KE Penetrators, Information Exchange Meeting, Aberdeen Proving Ground, Maryland (1973).

[1-47] W. E. Baker, P. S. Westine and F. T. Dodge, Similarity Methods in Engineering Dynamics, Chapter 8, Hayden, New Jersey, pp. 177-199 (1973).

[1-48] L. Euler, Neue Grundsätze der Artillerie(reprinted as Euler's Opera Omina), Teubnes, Berlin (1922).

[1-49] R. Robins, New Principles of Gunnery(Mathematical Tracts of Late Benjamin Robins, 1), Nourse, London(1761).

[1-50] E. Martel, S. A. 2 (1897).

[1-51] M. L. Gebeaud, Memorial de l' Artillerie française 54 (1935).

[1-52] E. Öpik, Acta et Communicatus Tartuensis, 28 (1936); also Irish Astron. J., 5, 14 (1958).

[1-53] R. L. Bjork, Paper No. P-1661, Rand Corp., Santa Monica, California (1958); Proc. 10th International Astronomy Congress, London (1959).

[1-54] M. L. Wilkins, In Methods in Computational Physics, Vol. 3, pp. 211-263, Academic Press, New York (1964).

[1-55] Laura J. Hageman and Ernest P. Lee, Report BRLCR 305 U. S. A. Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland (1976).

[1-56] G. R. Johnson, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Series E. 44, 95 (1977).

第二章　穿甲力学的理论和实验方法概貌

§2.1　穿甲力学概貌

穿甲力学的大量工作，一方面是研究薄板或中厚靶板在弹体撞击下的穿透或严重变形破坏的问题（即进攻问题）；另一方面则研究弹体在薄板或中厚靶板上跳飞或嵌埋时，怎样基本上保持靶板的子结构仍有合格的运行条件（即防御问题）。不论理论分析和实验研究，都只限于弹体对靶板的垂直撞击，而且也只限于弹体的对称轴垂直于靶板表面的撞击。其主要原因是弹体对称轴垂直于靶板表面的垂直撞击，远远比弹体在一般取向下的斜向撞击简单得多。为了要研究一般取向下的斜向撞击，不仅分析方程要复杂得多，即使在实验中要控制这样的初始撞击条件，也是非常困难的。在过去的穿甲力学工作中，人们很少研究弹体本身的破坏，即使有少量的研究，也只是一种纯经验性的研究。

本章将概述下列各问题：（１）实验结果的经验公式；（２）在军用弹体速度下，靶体的侵入阻力和破坏的分析模型；（３）超高速撞击条件下的分析模型；（４）靶体和靶体系统的数值计算；（５）实验数据和实验方法。我们将按上述五个方面，简要介绍当前穿甲力学的概貌。

§2.2　实验结果的经验公式

在早期，人们无法用实验手段观察撞击现象的具体过程，也没有合适的理论条件可以计算侵入和穿透的发展过程。所以，人们在研究穿甲力学时，只能根据不同的初始条件做实验，再观察撞击以后的具体结果。如果在垂直射击实验中，所采用的弹体和靶体的材料都不变，所用的弹体的形状也不变，则初始条件只有

弹体的尺寸（如弹体的直径 D_0 和长度 L_0）、质量 m（或密度 ρ_p）、撞击速度 v_0、靶板的厚度 h_0、以及靶板密度 ρ_t，而观察所得的实验结果，无非就是靶板上的侵入深度 P 和弹坑容积 Γ_c，以及弹道极限速度 v_{BL}（或穿透后的剩余速度 v_f 等）。历史上，在大量实验数据的基础上，将上述诸量联系在一起的经验公式很多。例如，前面提到的海莱的《弹道试验学》[1-3]中就有不少这样的公式。最近还有里希脱[1-12]在 1972 年公布的半经验模型的简编，也有不少这类的公式。较早的公式有：

$$
\begin{aligned}
&\text{Morin(1833)} && P/D_0 = 2mv_0^2/(a_1\pi D^3) \\
&\text{Dideon} && P/D_0 = a_2\rho_t \ln(1 + a_3 v_0^2) \\
&\text{Helié(1840)} && P/D_0 = [4.608m/(a_4 D^3\pi\rho_t)]\ln(1 \\
& && \qquad + a_5' v_0^2) \qquad\qquad (2.1) \\
&\text{de Marr(1886)} && E_0 = a_6 D_0^{1.3} h_0^{1.4} \\
&\text{Helié(1840)} && \Gamma_c = a_7\left(\frac{1}{2}mv_0\right)
\end{aligned}
$$

其中 E_0 为穿透靶板所需要的弹体动能，a_1、a_2、$\cdots a_7$ 都是有量纲的常数。在这些经验公式中，我们只能要求所有量采用统一的量纲系统，例如 SI 量纲系统。

晚近，人们有了量纲分析和相似理论这样有效的应用数学工具，经验公式不再用有量纲的量，而是采用无量纲的量。这种无量纲的量在穿甲力学中很多，例如：

（1）表示撞击速度 v_0，可以用马赫数 v_0/c_t，其中 c_t 为靶体中的声速，小于 1 的 v_0/c_t，代表亚声速撞击；大于 1 的 v_0/c_t，代表超声速撞击；

（2）表示弹体和靶体的相对密度的是 ρ_p/ρ_t；

（3）表示侵入深度 P 的是侵入比 P/D_0，其中 D_0 为弹体的直径；

（4）表示弹体动能的，称为彼斯得数（Best number，也称密兹数 Metz number），它是 $\rho_t v_0^2/\text{BHN}$，其中 BHN 为布氏硬度数；

（5）表示靶体的屈服应力 σ_{Yt} 的无量纲数用 $\sigma_{Yt}/(\rho_t c_t^2)$，其中 ρ_t、c_t 为靶体的密度和其中的声速。

还有很多和撞击有关的无量纲量。对此，有许多教本或专著曾予论述。

因而晚近，有很多用无量纲量表示的穿甲力学经验公式。例如：

（1）基里斯曼-戈林（Christman-Gehring，1966）[2-1]公式　这个公式是他们二人在研究用柱形弹体撞击靶板时得到的，后又经塔特（A. Tate 1947，1969）[2-2,2-3]进行调整。本式可以写成

$$\frac{P}{D_0}=0.222\left(\frac{\rho_P v_0^2}{\sigma_{Yt}}\right)\frac{D_0 L_0}{D_c^2} \tag{2.2}$$

其中 σ_{Yt} 为动力屈服应力（靶体材料的），其定义见参考文献〔2-4〕。D_c 为弹坑的直径，0.222 为一无量纲的常数。（2.2）式和实验结果相符合。

（2）邓斯-华许（J. K. Dienes-J. M. Walsh，1970）[2-1]公式　这个公式适用于超高速撞击，在这种撞击下，重量相同但形状不太相同的弹体，在撞击后历经一段不尽相同的过程，最后都被本身重量的惯性力压成一块形状和弹坑相同的薄壳。设

P＝弹坑深度或其它有关弹坑的典型尺寸；

D_0＝和弹体重量相同的球形弹体的直径；

ρ_t＝靶体的密度；

c_t＝靶体中的声速；

ρ_P＝弹体的密度；

v_0＝弹体的撞击速度。

则邓斯-华许公式可以写成

$$\frac{P}{D_0}=a_5\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^{1/3}\left(\frac{v_0}{c_t}\right)^{0.585} \tag{2.3}$$

a_5 为一无量纲常数，但和靶体材料的屈服动力强度有关。

（3）爱希尔柏格-戈林（Eichelberger-Gehring，1962）[2-6]公式　对于超高速撞击中弹坑的深度公式，可以写成

$$\frac{P}{D_0}=0.922\times10^{-3}\ \frac{\rho_p c_t^2}{\text{BHN}}\left(\frac{v_0}{c_t}\right)^{0.686} \qquad (2.4)$$

本式所有代号和（2.2）、（2.3）式相同，但 BHN 为布氏硬度数，这就包括了材料的力学特性。

此外还有不少相类似的无量纲经验公式，不一一类举。这些公式虽然是从实验数据总结来的，但在设计工作中的确是很有用处的。其常数只要有一个实验数据就能决定，并能用以适应不同度量系统的各种量。

所有这些公式都有一定的限度。以邓斯-华许公司为例，(2.3)式适用的范围为：

（1）撞击速度不要小于靶体中声速的两倍；

（2）弹体形状的纵横比不要超出 3:1；

（3）弹体密度不要超过靶体密度的三倍。当然，有些实验证明，这样的限度是保守的。

§2.3 军用枪炮速度的分析模型

分析模型根据系统的物理要求，提供各种参数之间的关系式，它们有时和经验式很相像，只是涉及的物理量更多。这种关系式，一般讲来比经验式有所改进，而且总是言之成理，有根有据的。

有时，一些基本物理量之间的关系，可以用物理观念写成简单的经验公式。例如，阻力 F 一般是速度 v 的函数，我们有各种各样的阻力公式，但最有名的公式可以写成

$$F=a_0'+a_1'v+a_2'v^2 \qquad (2.5)$$

其中 a_0'、a_1'、a_2' 为常数，式右三项分别代表靶体的凝聚阻力、摩擦阻力和靶体中接触弹体部分跟着弹体向前作加速运动所形成的阻力。最后一项称为**虚质量作用**（virtual mass effect）[2-7,2-8]。其第一项和第二项都是邦锡来在 1829 年提出来的[1-1]，在以后的工作中用处很大。

穿甲力学的全部问题是很复杂的，为了简化侵入或穿透的问题，我们常常使用一些限制性的先验假定，这些假定都是能反映系统的某一些实际情况的。在穿甲力学（中等弹速的范围内）中

常用的先验假定是：弹体形状是完全刚性的，靶体在撞击中的变形是理想塑性的，以及靶体在穿透破坏过程中的特定的破坏模式。

在某些情况下，这种模型只要给定系统的初始条件、撞击的几何条件、以及系统的材料力学性质，就能导出必要的结论，而且完全能预见侵入和穿透的全过程。

当然在大部分情况下，对这类问题的全部分析，不是要求有先验的假定，就是在事后需要对某种尺寸进行测定，然后反过来验证原分析。

对于半无限介质的侵入而言，侵入体经受的阻力是由下列诸方面决定的：（1）靶体的强度效应；（2）介质的摩擦阻力；（3）等效流体动力学正压力；（4）把弹体从靶体分离以及把靶体的表面效应也考虑在内的弹体表面上所有剪力的合力[2-9,2-10]。如果把一定的表面破坏机理考虑在内，这个模型有可能用以处理薄靶板的穿透问题。

对薄靶板问题而言，非穿透性破坏的机理，可以用靶板按弹头的形状变形而产生隆起，或象图 1-2 中描述的，由于应变在径向的延伸而产生的盘形凹陷，或两者兼有的模式来研究[2-11]（见图 1-2）。对于单一过程所形成的穿透而言，既能用钝剪的挤凿模型，也能用韧性的扩展型破坏的模型（见图 1-3 d、h）。除此而外，还可以用撞击体和靶体的动量平衡来研究这个问题。当然，不论用动量或能量平衡，都要预先假设靶板破坏脱落部分在击穿时的形状和位移地点。有些靶板穿透的过程被分为若干阶段，每一阶段有不同的机理，我们称这种穿透模型为**多阶段模型**。例如，初始阶段是压缩阶段；最终阶段是挤凿型的剪断阶段；中间阶段是压缩和剪断同时都有的阶段[2-12]。

模型的其它物理因素还要考虑下列诸问题：（1）弹体运动对靶体的压缩，弹体头部的膛孔和展孔过程，并使板上形成孔口的过程，这里要考虑摩擦和靶体材料的惯性作用；（2）只考虑靶体的阻力和惯性力[2-13]；（3）把靶体惯性、流体动力阻力和摩擦阻力[1-12]联合起来考虑。

§2.4 超高速撞击的分析模型

超高速撞击的分析在近二十年来，有了重要的突破性的进展。这种进展同样影响了对军用弹速撞击和一般高速撞击分析的发展。在超高速撞击中，应力很大，以致可以略去弹体和靶体的刚性，和略去它们的可压缩性，把撞击当作是纯粹的流体流动。这样，对材料性能描述的要求就大大降低。当然，为了照顾靶体和弹体的强度，我们可以在柏努利流体力学方程中，增设一些修正项。我们已经用柏努利方程或经过修正的柏努利方程，作为研究高速波撞击的动力学方程，从而研究了很多近代力学问题。如：流星体的弹坑效应[2-14,2-15]，超高速粒子的穿透问题[1-52]，蒙罗(Munroe)喷射或锥形装药[2-16,2-17,2-18,2-19,2-20,2-21]，以及动能侵入体的推进长杆中的撞击波[2-2,2-8]等。

由于这种发展，在穿甲力学中，现在已有两种易于处理的撞击速度范围：即超高速撞击速度和军用低弹速。在这两种速度范围内，撞击现象是易于预测的。在军用低弹速范围，我们假定弹体是刚性的，从而避免了难于研究的弹体变形问题，而只要对靶体变形作一些简单的强度假设就可以了。在超高速撞击中，我们把弹体和靶体都看作是一种简单的流体，撞击是两种流体之间的相互作用，有时认为流体流动根本没有强度，也可以把这种理想流体看作是有强度的。在较高的弹速范围和一般高速撞击下，我们应该考虑弹体的强度和弹性变形，这样带来了很大的困难，从而使其成为撞击理论中的空白。由于人们用不可压缩的流体力学理论研究超高速撞击获得极大成功，由于用有限差分法和大型计算机在处理金属间的撞击作用的成功，人们自然想到，怎样用可压缩流体力学模型来研究、改进撞击和侵入的流体力学理论。在下一阶段中，我们的主要工作是引进弹塑性力学的本构方程，用以研究军用弹速和一般高速撞击下的问题，以弥补上面所说的理论空白。

§2.5 数 值 方 法

研究弹体和靶体在撞击过程中的变形和运动，我们共有五组性质不同的方程或关系式。即：（1）质量守恒；（2）动量守恒；（3）能量守恒；（4）材料作为介质在撞击中所反映的本构方程；以及（5）用位移速度表示应变速度的几何关系式，即协调方程。这些方程式在特定的几何条件、边界条件和起始条件下求解，是一个巨大的任务，人们经常使用各种计算程序在大型计算机上进行。

计算这类问题的计算程序，可以分为三类：

（1）拉格朗日坐标系描写的程序　拉格朗日坐标系是固结在变形体的内部的。当变形体变形时，这个坐标网格也随着变形，我们就是用变形中的坐标网格来反映介质的变形过程的。现在将用拉格朗日坐标系来计算的程序，列表如下（见表 2-1）：

表2-1　常见的拉格朗日型计算程序

程序称号	适用范围	设计者或使用者	设计单位或使用单位	参考文献
HEMP	一维二维连续介质动力学（有限差分）	韦京斯（设）	美国加州大学劳仑兹实验室	〔1-54〕〔2-21〕
DEPROSS	弹塑性结构动力学（有限差分）	柏尔莫（设）	美国麻省理工学院 美国通用电器公司空间科学实验室	〔2-22〕〔1-43〕
CRAM	一维二维连续介质动力学（有限差分）	韦京斯（设） 萨根韦克等（使）	美国加州大学劳仑兹实验室 美国通用电器公司空间科学实验室 美国空军武器实验室	〔2-21〕 〔1-43〕 〔1-40〕 〔2-23〕
TOODY	一维二维连续介质动力学（有限差分）	柏索夫和本莱兹（设）	美国新墨西哥州圣地亚哥实验室	〔2-29〕

（续）

程序称号	适用范围	设计者或使用者	设计单位或使用单位	参考文献
SWIS	三维连续介质动力学（有限差分）	法拉齐和彼得苏（设）	美国华盛顿国防核机构	[2-23]
SWIS-SMI	结构和三维连续介质相互作用的动力学SWIS的扩充（有限差分）	司威特法拉齐和里德（设）	美国加州拉火拉"系统、科学、软件"	[2-24]
EPICS	三维连续介质动力学（有限元）	G.R.约翰逊（设）	美国麻省理工学院	[2-26] [2-27] [2-28]

最常用的拉格朗日型程序是HEMP，它用的是有限差分法，是美国加州大学劳仑兹实验室的韦京斯所提出的，主要用于一维或二维的连续介质动力学的计算。从表2-1中可以看到，除了EPIC是从有限元法建立的拉格朗日型程序外，其余都是从有限差分法建立的。以三维连续介质动力学为对象的各种程序的建立，还是七十年中叶以后的事，这是和大规模集成电路的成功分不开的。以拉格朗日坐标为基础的计算机程序，既有优点也有缺点。用拉格朗日坐标处理各种材料间的界面和自由表面时，是非常自然而且直觉的，所以比较简单。同时，对于不同部分的材料有不同的应力历程时，我们容许对不同部分的材料用不同的本构关系。不过，拉格朗日坐标的描述，在处理流动场的歪变时，是很敏感的，当坐标网格发生较大变形后，计算常现不稳定的现象。总之，变形较大后，本法程序不能用，尤其是当网格发生相互折摺现象以后产生负的质量和其它病态现象。例如用本法研究层裂和疥斑型破坏问题是不合适的。但是，本法可以用来研究在层裂后，层裂的残物对主体靶板的受载影响。

（2）欧拉坐标系描写的程序　欧拉坐标系并不固结在变形体的内部，而是固定在空间里。当介质运动时，这个坐标系不变，

只是研究在指定的时刻，正处在某一已给的坐标网格中的介质的运动。最常用的欧拉型程序叫作 HELP，是“系统、科学、软件”的海格曼和华许（1970，1971）[2-30,2-31]设计的。以后，海格曼和李（1976）[2-32]还设计了改进的三维有限元的欧拉型程序，叫作 METRIC（表 2-2）。

表2-2　常见的欧拉型计算程序（用于和时间有关的计算）

程序称号	适用范围	设计者或使用者	设计单位或使用单位	参考文献
CAMEO	二维流体动力学（有限差法）	铁洛森	Firestone 轮胎橡胶公司	1963[2-28]
OIL 及其子程序（CDT，EOS，SETUP，REZONE）	三维连续介质流体动力学（有限差法）	W.E.约翰逊	美国通用原子报告	1965[2-33]
TRIOIL	三维刚塑性连续介质动力学（有限差分）	W.E.约翰逊	美国通用原子报告	1967[2-40]
OIL-RPM	二维刚塑性连续介质动力学（有限差分）	邓斯和华许	美国海湾通用原子公司	1970[2-5]
HELP	流体弹塑性二维多元动力学（有限差分）	海格曼和华许	美国“系统、科学、软件” 美国阿柏丁弹道研究实验室 同　上	1970[2-30] 1971[2-31] 1971[2-35] 1973[2-34]
PICWICK Ⅱ	二维流体动力学（有限差分）	—	美国通用电器公司空间科学实验室	1970[1-43]
DORF	二维连续介质动力学（有限差分）	W.E.约翰逊	美国空军兵器实验室	1971[2-42]

（续）

程序称号	适用范围	设计者或使用者	设计单位或使用单位	参考文献
TRIDORF	三维连续介质动力学（有限差分）	W.E.约翰逊	美国通用原子报告	1977[2-41]
METRIC	多元三维连续介质动力学（有限元法）	海洛格和李	美国"系统、科学软件"美国阿柏丁弹道研究实验室	1976[2-32]

对于大变形来说，欧拉型程序毫无问题是可用的。但在处理多种材料问题时，它难以处理各种材料间的界面；同样，对于有自由面的问题而言，也是比较困难的。因为在固定的欧拉坐标网格中，人们认为进入某一网格的材料，在瞬时间就均匀地扩散到这个网格空间的全部。在两种材料的交界处，一种材料在进入某一网格空间后，就要和这个网格空间的原有那种材料均匀地混合起来，随即改变了两种材料分处两部分空间的特性。同时，如果撞击体上有自由面，在变形中就会有材料通过自由面，进入原来没有材料占据的网格中去。如果同样这些材料要扩散到这个网格空间的全部，则在这个网格内，材料的密度就会降低，从而产生了其它难以处理的问题。在HELP程度中，海格曼和华许(1971)[2-31]曾针对这些问题，在欧拉网格中设置"示踪"质点来监视自由表面和各不同材料的间界面，从而使欧拉型程序有所改进。总的说来，厚靶板的弹坑研究，仍以采用欧拉型程序为佳。但对于层裂破坏的问题则很难适用。

（3）"网格中质点"(Particle in Cell, PIC）型的程序　为了保留拉格朗日型和欧拉程序的长处，并摈弃其短处，人们采用混合程序，其中尤以"网格中质点"的程序（PIC）最富有代表性（见表2-3)。

PIC程序容许处理大的变形和多元材料。它用一定质量的集中质点代表网格中的物质，这些质点的位置在每步计算中都先跟

表2-3 网格中质点程序和各种混合程序

(用于和时间有关的问题)

程序称号	适用范围	设计者或使用者	设计单位或使用单位	参考文献
PICK WICK	第一代 PIC 程序、二维程序，用于厚靶	棱　纳	美国通用电器公司空间研究实验室	1964[2-46] 1970[1-43]
WAVE-L		韦京斯	美国加州大学劳仑兹实验室	1963[2-50]
VISTA	第二代 PIC 程序，二维	棱　纳 哈　路	美国通用电器公司空间研究实验室	1966[2-45] 1970[1-43] 1969[2-43]
VISTA-CRAM	开始阶段用 VISTA，后期用 CRAM 的混合程序，研究流星撞击系统	萨教韦克利 吴达尔	美国阿柏丁弹道研究实验室	1967[2-44]
STRIDE		吕　德	美国洛克希脱飞弹和空间部	1967[2-53]
SHAPE	开始阶段用 PIC 或欧拉型程序，后期用弹塑性拉格朗日型程序，计算多元靶体的撞击	布鲁克斯等 克里引海根等 柏索夫等	美国空间和飞弹系统组织 美国新墨西哥州圣地亚实验室	1968[2-47] 1970[2-54] 1975[2-48]
VISTA-DEPROSS	研究流星撞击系统时主结构有花瓣型破坏时的混合程序	棱　纳	美国通用电器公司空间科学实验室	1970[1-43]
VISTA-PICKWICK Ⅱ	研究厚靶撞击的混合程序	棱　纳	美国通用电器公司空间科学实验室	1970[1-43]

（续）

程序称号	适用范围	设计者或使用者	设计单位或使用单位	参考文献
STEEP	用二维平面应变研究斜撞问题	洛苏伯拉格等		1970[2-49]
SHEP	研究挤凿、侵入、穿透问题	华格纳		1973[2-52]
CSQ		伯索尔夫等		1975[2-48]
PISCES		渥发尔等	美国华盛顿国防核组织	1975[2-51]

踪决定下来，这样就解决了决定自由表面的位置问题，并避免了虚假的材料扩散问题。当然 PIC 程序并不能容许随着每一部分的材料的变形历史跟踪决定其本构关系，因而有某些缺点。但对于层裂破坏这样的重要问题，完全可以用可压缩性流体动力学模型予以解决。所以层裂破坏的动力学问题，如流星体和人造卫星的撞击问题，就是用 PIC 程序解决的。

用混合程序成功地研究了流星体撞击人造卫星外壳的缓冲保护板，在缓冲板中逐步形成层裂片锥形袋；通过它，形成了对卫星外壳主体施加冲击载荷的问题（图 2-1）。

在计算这个问题时，先用 VISTA（即 PIC）程序计算缓冲板的层裂过程，得到缓冲板后面层裂片锥形袋中质点密度和速度随时间的分布。然后用这些结果作为主体结构上受到的撞击载荷，并用任一拉格朗日型程序计算主体结构的撞击过程。这样，就把 VISTA 和拉氏程序混合使用了。如果载荷强度很大，使冲击波的传播成为重要因素，则我们就可以用 VISTA-CKAM 的混合程序。如果载荷强度不大，在缓冲板上仅是花瓣型破坏而不生成层裂破坏，则主体结构可以看作是不可压缩的，而整个计算就可

以采用 VISTA-DEPROSS 的混合程序。

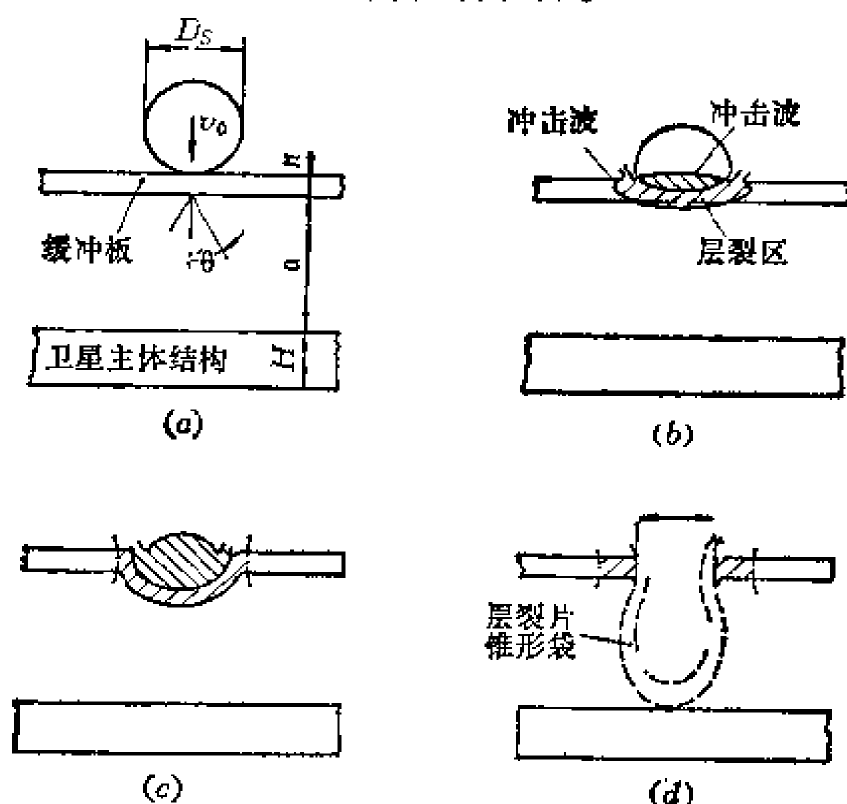


图2-1 流星体撞击缓冲板，在缓冲板发生层裂破坏后的层裂片锥形袋对主体结构的冲击载荷

（a）在缓冲板的撞击；（b）撞击缓冲板；（c）层裂锥袋的形成；（d）层裂片锥形袋对主体结构的冲击。

以流星群撞击厚靶为例，我们兼用 VISTA 和 PICKWICK Ⅱ 程序。在早期过程中，我们为了能很好地照顾到自由表面和多种材料的间界面，采用“网格中质点”（PIC）程序 VISTA；在后期，再用网格中质点的那种质量离散化的模型，已得不到足够的准确度。但这时材料的性能已不是最重要的因素。我们只要知道撞击的碎片给靶体传递了多少动量和多少能量就足够了。在这时，当然可以使用欧拉型程序（PICK-WICK Ⅱ）。所以，我们在解决超高速流星群撞击厚靶时，采用 VISTA-PICKWICK Ⅱ 的混合程序。

侵入过程的拉格朗日型计算程序中，以 EPIC Ⅱ 的程序[2-28]为例，包括材料的弹性的、塑性的流体力学的材料特性，以及运动方程、连续方程、能量方程和协调方程等各种关系式。

在表示材料性能的本构方程中，我们采用应力偏量 s_{ij} 和应变偏量 e_{ij} 来表示。应力偏量 s_{ij} 和应力 σ_{ij} 的关系，以及应变偏量 e_{ij} 和应变 ϵ_{ij} 的关系可以写成

$$s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij},\quad e_{ij}=\epsilon_{ij}-\epsilon\delta_{ij} \tag{2.6}$$

其中，σ 和 ϵ 为平均主应力和主应变，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\frac{1}{3}\sigma_{ii}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\\ \epsilon&=\frac{1}{3}\epsilon_{ii}=\frac{1}{3}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33})=\frac{1}{3}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

其中 σ_1、σ_2、σ_3 为三个主应力分量，ϵ_1、ϵ_2、ϵ_3 为三个主应变分量。(2.6) 式中的 δ_{ij} 代表 1 或 0，即

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{2.8}$$

我们还要用一个等效应力 $\bar{\sigma}$ 和等效应变 $\bar{\epsilon}$，它们用主应力和主应变表示时是

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\\ \bar{\epsilon}&=\sqrt{\frac{2}{9}[(\epsilon_1-\epsilon_2)^2+(\epsilon_2-\epsilon_3)^2+(\epsilon_3-\epsilon_1)^2]}\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

用应力偏量和应变偏量[1] 表示时是

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}=\Big\{\frac{3}{2}\{(\sigma_{11}-\sigma)^2+(\sigma_{22}-\sigma)^2+(\sigma_{33}-\sigma)^2\\&\qquad+2\sigma_{12}^2+2\sigma_{23}^2+2\sigma_{31}^2\}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\ \bar{\epsilon}&=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}=\Big\{\frac{2}{3}\{(e_{11}-e)^2+(e_{22}-e)^2+(e_{33}-e)^2\\&\qquad+2e_{12}^2+2e_{23}^2+2e_{31}^2\}\Big\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

用应力张量和应变张量[2] 表示时是

[1], [2] 这里采用的剪应变的定义和 EPIC 的略有不同。我们采用应变张量的定义 ϵ_{12}，EPIC采用工程定义 γ_{12}，而 $\gamma_{12}=2\epsilon_{12}$。——编者注

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}=&\left\{\frac{1}{2}\{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right.\\
&\left.\qquad+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)\}\right\}^{\frac{1}{2}}\\
\bar{\epsilon}=&\left\{\frac{2}{9}\{(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})^2+(\epsilon_{22}-\epsilon_{33})^2+(\epsilon_{33}-\epsilon_{11})^2\right.\\
&\left.\qquad+6(\epsilon_{12}^2+\epsilon_{23}^2+\epsilon_{31}^2)\}\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{2.11}
$$

通常有两种屈服准则：

（1）冯密西斯（Von Mises）准则为

$$\bar{\sigma}=\sigma_{YT} \tag{2.12}$$

式中　σ_{YT}——简单拉伸的屈服应力。

（2）屈立斯卡（Tresca）准则为

$$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_{YT} \qquad (\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3) \tag{2.13}$$

我们在这里将用冯密西斯屈服准则。

当 $\bar{\sigma}\leqslant\sigma_{YT}$ 时，应力在弹性范围，应力应变关系采用虎克定律（见[2-54]）●，

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}\lambda\epsilon_{kk}+2G\epsilon_{ij}-Q\delta_{ij} \tag{2.14}$$

其中 δ_{ij} 见（2.8）；$\epsilon_{kk}=\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33}$；而 λ，G 都是梅拉弹性常数；Q 为人为粘性[2-55]，它是在进行有限差分或有限元计算中，引用每一个单元的集中质量时，为了消除局部的振荡而增设的。对它将在后面进一步讨论。

当 $\bar{\sigma}\geqslant\sigma_{YT}$ 时，塑性流动开始，应力应变关系可以采用冯密西斯的增量理论

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{3}\sigma_{YT}\frac{1}{\dot{\bar{\epsilon}}}\left(\dot{\epsilon}_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}\right)-(P+Q)\delta_{ij} \tag{2.15}$$

其中 P、Q 分别为流体压力和人为粘性，$\dot{\bar{\epsilon}}$ 为等效应变速度（Equivalent Strain Rate），定义为

● 这里采用的剪应变的定义为张量定义（$\epsilon_{12},\epsilon_{23},\epsilon_{31}$），它和工程剪应变（$\gamma_{12},\gamma_{23},\gamma_{31}$）之间相差一半，即（$\gamma_{12},\gamma_{23},\gamma_{31}$）$=2(\epsilon_{12},\epsilon_{23},\epsilon_{31})$。

$$\dot{\bar{\epsilon}}=\sqrt{\frac{2}{9}\{(\dot{\epsilon}_{11}-\dot{\epsilon}_{22})^2+(\dot{\epsilon}_{22}-\dot{\epsilon}_{33})^2+(\dot{\epsilon}_{33}-\dot{\epsilon}_{11})^2+6(\dot{\epsilon}_{12}^2+\dot{\epsilon}_{23}^2+\dot{\epsilon}_{31}^2)\}} \tag{2.16}$$

(2.15)、(2.16) 中的点符，代表对时间的总变率。例如

$$\dot{\epsilon}=\frac{d\epsilon}{dt}=\frac{\partial\epsilon}{\partial t}+v_k\frac{\partial\epsilon}{\partial x_k} \tag{2.17}$$

其中 $v_k=(v_1,v_2,v_3)$ 为位移速度，或流动速度。在大位移的问题中，用拉格朗日坐标系来表示的应变位移关系式为[2-54]

$$\epsilon'_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)i,j=1,2,3 \tag{2.18}$$

其中 $u_i=(u_1,u_2,u_3)$为在 x_i 轴向的位移分量。变形体元素 $dx_1dx_2dx_3$ 在变形后产生了刚体转动，这个刚体转动可以用变形体元素绕 x_1，x_2，x_3 轴的转角 ω_1，ω_2，ω_3 来表示，即

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\sin^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\right]\\ \omega_2&=\sin^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right]\\ \omega_3&=\sin^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

所以，(2.18) 中不尽是变形，有一部分是代表刚体转动。为了消除刚体转角的影响，我们可以把坐标轴转回来，回到未变形以前的坐标原取向，或是把刚体转动这一部分扣去。于是，我们证明，代表真正应变的应变分量和位移的关系式可以写成 ϵ_{ij}

$$\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\quad i,j=1,2,3 \tag{2.20}$$

这一点是很容易证明的，将 (2.18) 写成

$$\epsilon'_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\right]\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right]\right\} \tag{2.20 a}$$

$\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$，$\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$都代表刚体转动（见2.19），所以，要从（2.20 a）中扣除刚度转动的部分，就是把这一部项置于零，即得（2.20）。所以（2.20）为真正应变分量的应变位移关系。

我们也可以证明它是在拉格朗日坐标系中，相对于未变形前坐标取向的坐标而言的应变分量表达式。为了简便起见，我们用平面问题来证明（图 2-2）。在平面问题中，ϵ'_{ij} 和 ω_3 为

$$
\left.\begin{aligned}
\epsilon'_{11}&=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2\right]\\
\epsilon'_{22}&=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]\\
\epsilon'_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\\
\omega_3&=\sin^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{2.21}
$$

在（x'_1，x'_2）坐标中的应变分量为 ϵ'_{11}，ϵ'_{21}，ϵ'_{22}，则

$$\epsilon ds_0^2=\epsilon'_{11}dx_1'^2+\epsilon'_{22}dx_2'^2+2\epsilon'_{12}dx'_1dx'_2\tag{2.22}$$

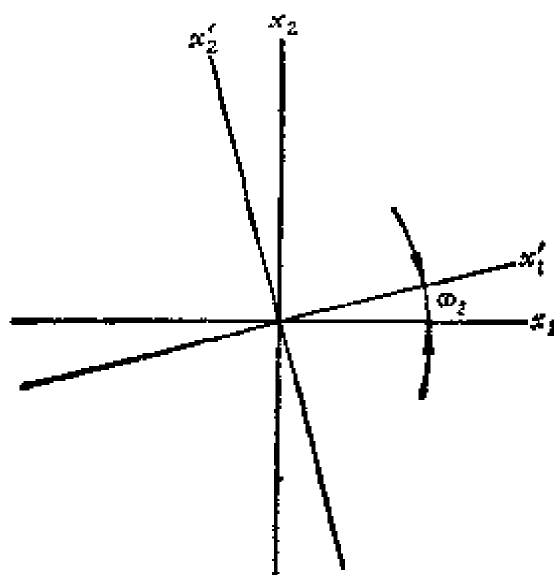


图2-2　坐标和刚体转动

设 dx'_1，dx'_2 和原坐标方向 dx_1，dx_2 之间的刚体转角为 ω_3，则

$$\left.\begin{aligned} dx_1' &= \cos\omega_3 dx_1 + \sin\omega_3 dx_2 \\ dx_2' &= -\sin\omega_3 dx_1 + \cos\omega_3 dx_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

把（2.23）代入（2.22）合并整理得 ϵds_0^2 在（x_1，x_2）中的表达式

$$\epsilon ds_0^2 = \epsilon_{11} dx_1^2 + \epsilon_{22} dx_2^2 + 2\epsilon_{12} dx_1 dx_2 \tag{2.24}$$

这儿有

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{2}[(\epsilon_{11}'+\epsilon_{22}')+(\epsilon_{11}'-\epsilon_{22}')\cos2\omega_3 - 2\epsilon_{12}'\sin2\omega_3] \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{2}[(\epsilon_{11}'+\epsilon_{22}')+(\epsilon_{22}'-\epsilon_{11}')\cos2\omega_3 + 2\epsilon_{12}'\sin2\omega_3] \\ 2\epsilon_{12} &= (\epsilon_{11}'-\epsilon_{22}')\sin2\omega_3 + 2\epsilon_{12}'\cos2\omega_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

把（2.21）代入（2.25），略去二次以上的项，即可证明

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right] \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right] \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

所以，用张量表达式，可以写成

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

$$i, j = 1, 2; \quad k = 1, 2 \tag{2.26a}$$

我们从上式，可以类推求得三维公式（2.20)。这就证明了(2.20)是代表真正应变的应变位移表达式。我们在后面一切计算中，将采用（2.20）式作为应变位移关系式（或相当于协调公式)。

现在让我们研究位移 $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$（$i=1, 2, 3$）对时间的全导数，首先质点运动的速度定义为

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dot{u}_i \tag{2.27}$$

其次，$\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$的全导数为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)+v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$$

$$-\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{2.28}$$

于是，从（2.20），我们求得

$$\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}-\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-2\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right\} \tag{2.28a}$$

（2.27）、（2.28）、（2.28a）在弹塑性体的动力计算中，都是有用的。

在下面的计算中，我们将引进：

$$\left.\begin{aligned}&V_0=\text{微元在变形前的容积}\\&V=\text{微元在变形后的容积}\\&\rho_0=\text{在变形前材料的密度（单位容积的质量）}\\&\rho=\text{在变形后材料的密度（单位容积的质量）}\end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

我们将在（2.14）、（2.15）中，以 V_0，V，ρ_0，ρ 来表示 ϵ_{kk}，根据定义，有

$$\epsilon_{kk}=\frac{V}{V_0}-1=\frac{\rho_0}{\rho}-1 \tag{2.30}$$

并记

$$\mu=\frac{\rho}{\rho_0}-1=\frac{V_0}{V}-1 \tag{2.31}$$

于是在 $\bar{\sigma}\leqslant\sigma_{YT}$(即弹性范围内)（2.14）、（2.15）可以写成

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}\lambda\left(\frac{V}{V_D}-1\right)+2G\epsilon_{ij}-\delta_{ij}Q \tag{2.32}$$

在 $\bar{\sigma}\geqslant\sigma_{YT}$（即塑性范围内）

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{3}\sigma_{YT}\frac{1}{\dot{\bar{\epsilon}}}\left(\dot{\epsilon}_{ij}-\delta_{ij}\frac{\dot{V}}{3V_0}\right)-(P+Q)\delta_{ij} \tag{2.33}$$

其中 ϵ_{ij}，$\dot{\epsilon}_{ij}$ 见（2.20）和（2.28），还有 u_i 为位移分量，v_i为变形速度分量，它们之间的关系为

$$v_i = \dot{u}_i \tag{2.34}$$

(2.33) 中的 P 为流体静压力，它是由梅-葛留那森（Mie-Gruneisen）[2-56] 状态方程决定的。它是由容积应变 μ 和比内能 I（每单位质量的内能）所决定的，梅-葛留那森方程为

$$P = (K_1\mu + K_2\mu^2 + K_3\mu^3)\left(1 - \frac{\Gamma\mu}{2}\right) + \Gamma\rho_0 I \tag{2.35}$$

其中 K_1，K_2，K_3 为和材料性质有关的常数，Γ 为葛留那森系数。比内能 I 为单位质量变形能，所以 $\rho_0 I$ 为单位体积(变形前)的变形能。设单位体积变形前的变形功为 ε，则

$$\rho_0 I = \varepsilon - \frac{1}{2}\rho_0(v_k v_k) \tag{2.36}$$

其中 $\frac{1}{2}\rho_0 v_k v_k$ 为单位体积（变形前）物质的动能，而能量方程[1-16] 为

$$\dot{\varepsilon} = s_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} - (P + Q)\frac{\dot{V}}{V_0} \tag{2.37}$$

人为粘度 Q 自冯诺埃门（Von NeumannJ）、吕乞梅姚(R. D. Richmayer)(1950)[2-56] 用它在数值积分动力学方程时消除暂时的振荡之后，业已在许多地方用于各种计算程序[1-54、2-57]。它是由 $\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{V}}{V_0}$ 的线性项和二次项所组成的，只有当 $\frac{\dot{V}}{V_0}$ 为负值时它才能有值，反之，当 $\frac{\dot{V}}{V_0}$ 为正值时，它等于零。亦即

$$\left.\begin{aligned} &Q = C_L\rho_0 c_{so} h \left|\frac{\dot{V}}{V_0}\right| + c_0^2\rho_0 h^2\left|\frac{\dot{V}}{V_0}\right|^2, \quad \text{当 } \dot{V} < 0 \\ &Q = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{当 } \dot{V} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

其中 ρ_0 为材料起始的密度，c_{so} 为材料中的初始声速，h 为微元的平均尺寸，C_L、C_0 为两个常数（无量纲），$C_L = 0.5$，$C_0^2 = 4.0$[1-54]。

现在让我们研究质量守恒方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) = 0, \quad (v_k = \dot{u}_k) \tag{2.39}$$

也可以写成$\left(\dot{\rho}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\right)$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho}+\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0,\quad (v_k=\dot{u}_k) \tag{2.40}$$

但$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{V_0}{V}$，最后有

$$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \tag{2.41}$$

它是用V，v_k表示的连续方程。

最后，运动方程可以写为

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\rho\ddot{u}_i \tag{2.42}$$

它也可以写为

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\rho\dot{v}_i \tag{2.43a}$$

$$\dot{u}_i=v_i \tag{2.43b}$$

这里一共有V，u_i，v_i七个未知数，和（2.41)、(2.43a、b）七个方程。只要有一定的边界条件和起始条件，本题在大型计算机帮助下，用有限差分法和有限元法，就能求得数值解。

以上所述，基本上是以EPIC程序为基础。现在我们再简单地讲一下拉格朗日型程序中，最常见的一维、二维弹塑性HEMP程序[1-54]。

一维问题（用标示指数γ表示）包括

（1）杆件，$\gamma=1$；

（2）圆对称平面问题，$\gamma=2$；

（3）球对称问题，$\gamma=3$。

我们选γ为坐标，于是有

（1）拉格朗日运动方程

$$\frac{V_0\rho_0}{V}\dot{v}_r=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+(\gamma-1)\frac{\sigma_r-\sigma}{r} \tag{2.44}$$

（2）连续方程

$$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{1}{r^{\gamma-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\gamma-1}v_r\right) \tag{2.45}$$

（3）能量方程

$$\dot{\varepsilon}=s_{11}\dot{\epsilon}_{11}+(\gamma-1)s_{22}\dot{\epsilon}_{22}-(P+Q)\frac{\dot{V}}{V_0} \tag{2.46}$$

（4）人为粘性

$$\left.\begin{aligned}&Q=C_1\rho_0 c_{s0}h\left|\frac{\dot{V}}{V_0}\right|+c_0^2\rho_0 h^2\left|\frac{\dot{V}}{V_0}\right|^2, && \dot{V}<0\\ &Q=0, && \dot{V}>0\end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

（5）流体静压力

$$\left.\begin{aligned}&P=(K_1\mu+K_2\mu^2+K_3\mu^3)\left(1-\frac{1}{2}\Gamma\mu\right)+\Gamma\rho_0 I\\ &\rho_0 I=\varepsilon-\frac{1}{2}\rho_0 v_r^2\\ &\mu=\frac{V_0}{V}-1=\frac{\rho}{\rho_0}-1\end{aligned}\right\} \tag{2.48}$$

（6）应力应变关系

$$\sigma_i=\lambda\left(\frac{V}{V_0}-1\right)+2G\epsilon_i-Q,\quad(\bar{\sigma}\leqslant\sigma_{YT}) \tag{2.49 a}$$

$$\sigma_i=\frac{2}{3}\sigma_{YT}\frac{1}{\dot{\bar{\epsilon}}}\left(\dot{\epsilon}_i-\frac{\dot{V}}{3V_0}\right)-(P+Q),\quad(\bar{\sigma}\geqslant\sigma_{YT}) \tag{2.49 b}$$

其中

$$\dot{\bar{\epsilon}}=\sqrt{\frac{2}{9}\left[(\dot{\epsilon}_1-\dot{\epsilon}_2)^2+(\dot{\epsilon}_2-\dot{\epsilon}_3)^2+(\dot{\epsilon}_3-\dot{\epsilon}_1)^2\right]} \tag{2.50 a}$$

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \tag{2.50 b}$$

（7）协调方程

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\epsilon}_1=\frac{\partial v_r}{\partial r}, && \epsilon_1=\frac{\partial u_r}{\partial r}\\ &\dot{\epsilon}_2=\frac{v_r}{r}, && \epsilon_2=\frac{u_r}{r}\end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

其中

$\gamma=1$ 时(杆件)　　$\dot{\epsilon}_2=\dot{\epsilon}_3=0$　　(2.52a)

$\gamma=2$ 时(平面圆对称)　　$\dot{\epsilon}_3=0$　　(2.52b)

$\gamma=3$ 时(球对称)　　$\dot{\epsilon}_2=\dot{\epsilon}_3$　　(2.52c)

对于二维的问题而言，HEMP2程序可以处理两种问题(δ为标示指数)

(1) 平面问题，$\delta=0$；

(2) 轴对称问题，$\delta=1$。

于二维HEMP程序的方程为(x，y两种坐标)

(1) 拉格朗日运动方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\rho_0 V_0}{V}\ddot{u}_x&=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\delta\frac{\sigma_{xy}}{y}\\\frac{\rho_0 V_0}{V}\ddot{u}_y&=\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\delta\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{\phi\phi}}{y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.53}$$

(2) 连续方程

$$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\delta\frac{v_y}{y}\tag{2.54}$$

(3) 能量方程

$$\dot{e}=s_{xx}\dot{\epsilon}_{xx}+s_{yy}\dot{\epsilon}_{yy}+s_{\phi\phi}\dot{\epsilon}_{\phi\phi}+2\sigma_{xy}\dot{\epsilon}_{xy}-(P+Q)\frac{\dot{V}}{V_0}\tag{2.55}$$

(4) 人为粘性

$$\left.\begin{aligned}&Q=C_L\rho_0 c_{s0}h\left|\frac{\dot{V}}{V_0}\right|+c_0^2\rho_0 h^2\left|\frac{\dot{V}}{V_0}\right|^2 &\dot{V}<0\\&Q=0 &\dot{V}>0\end{aligned}\right\}\tag{2.56}$$

(5) 流体静压力

$$\left.\begin{aligned}&P=(K_1\mu+K_2\mu^2+K_3\mu^3)\left(1-\frac{1}{2}\Gamma\mu\right)+\Gamma\rho_0 I\\&\rho_0 I=\varepsilon-\frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2)\\&\mu=\frac{V_0}{V}-1=\frac{\rho}{\rho_0}-1\end{aligned}\right\}\tag{2.57}$$

（6）应力应变关系

当 $\bar{\sigma} \leqslant \sigma_{YT}$ 时

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda\left(\frac{V}{V_0} - 1\right) + 2G\epsilon_{xx} - Q \\
\sigma_{yy} &= \lambda\left(\frac{V}{V_0} - 1\right) + 2G\epsilon_{yy} - Q \\
\sigma_{\phi\phi} &= \delta\sigma_{yy} \\
\sigma_{xy} &= 2G\epsilon_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

当 $\bar{\sigma} \geqslant \sigma_{YT}$ 时

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{2}{3}\sigma_{YT}\frac{1}{\dot{\bar{\epsilon}}}\left(\dot{\epsilon}_{xx} - \frac{\dot{V}}{3V}\right) - (P + Q) \\
\sigma_{yy} &= \frac{2}{3}\sigma_{YT}\frac{1}{\dot{\bar{\epsilon}}}\left(\dot{\epsilon}_{yy} - \frac{\dot{V}}{3V}\right) - (P + Q) \\
\sigma_{\phi\phi} &= \delta\sigma_{yy} \\
\sigma_{xy} &= \frac{2}{3}\sigma_{YT}\frac{1}{\dot{\bar{\epsilon}}}\dot{\epsilon}_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

其中

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{9}\left[(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy})^2 + (\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{\phi\phi})^2 + (\dot{\epsilon}_{\phi\phi} - \dot{\epsilon}_{xx})^2 + 6\dot{\epsilon}_{xy}^2\right]} \tag{2.60a}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{\phi\phi})^2 + (\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2\right]} \tag{2.60b}$$

（7）协调方程

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right] \tag{2.61a}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2\right] \tag{2.61b}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right] \tag{2.61c}$$

$$\epsilon_{\phi\phi}=\delta\epsilon_{yy} \tag{2.61d}$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xx}=&\frac{\partial v_x}{\partial x}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u_x}{\partial y}-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x}\right.\\&+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}\\&\left.+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{2.62a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{yy}=&\frac{\partial v_y}{\partial y}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\frac{\partial u_y}{\partial x}-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}\right.\\&+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}\\&\left.+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{2.62b}$$

$$\dot{\epsilon}_{\phi\phi}=\delta\dot{\epsilon}_{yy} \tag{2.62c}$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xy}=&\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\right.\\&-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right.\\&\left.\left.+\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right\}\end{aligned} \tag{2.62d}$$

我们必须指出，流体力学静压公式在HELP程序中，采取了下面另一种形式（1974）[2-58,2-59]：

（1）在冷态中，$I<I^*$（I^*由实验决定），$\rho/\rho_0<1$

$$P=P_{冷}=\left[A_1+\frac{B}{1+\frac{I}{I_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2}\right]I\rho+A_2\mu+B_6\mu^2 \tag{2.63a}$$

（2）在热态中 $I>I^*$，$\rho/\rho_0<1$

$$\begin{aligned}P=P_{热}=&A_1I\rho+\left[\frac{B_5I\rho}{\frac{I}{I_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2+1}+A_2\mu e^{-B_7\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right)}\right]\\&\times e^{-A_8\left[\frac{\rho_0}{\rho}-1\right]^2}\end{aligned} \tag{2.63b}$$

（3）在中间状态中 $I^{*}<I<I'$（I' 由实验决定），$\rho/\rho_0<1$

$$P=\frac{(I-I^{*})P_{热}+(I'-I)P_{冷}}{I'-I^{*}} \qquad (2.63c)$$

其中 A_i，B_i，I^{*}，I' 都是常数，根据不同的材料由实验决定。

欧拉程序和上述拉格朗日型程序类似，这里将暂不讨论。

§2.6 实验方法

标志末端弹道的基本数据是弹体和靶体的初始状态和终结状态，其中包括弹体和靶体的速度、运动方向、弹体和轨迹线的夹角，以及它们的形状尺寸。在习惯上，弹体是运动的，靶元是静止的，要求测定的数据是：

（1）弹体的轨迹线的变化，包括弹体粉碎或碎裂后碎块的轨迹线；

（2）传给靶体的运动，包括弹体本身和它的碎块传给靶体的运动；

（3）弹体和靶体在撞击后，形状尺寸的变化。

现在让我们分题叙述它们的测定方法：

（1）弹体的轨迹线的测定

测定弹体轨迹线的方法有下列三种：（甲）高速照相法；（乙）激光测定法；（丙）纸靶或薄塑料靶法。关于高速照相法将在后面讨论。激光测定法是把激光束等间隔地安排在弹体飞经的轨迹线上，即将激光发射器置于轨迹线之右侧，激光接收器置于轨迹线的左侧，激光束和弹体轨迹线相交。所有激光接收器都和计算机相接，当弹体过激光束时，激光受阻隔，接收器收不到激光而将这种信号输入计算机；每个接收器在弹体穿过激光束时，相继逐一给计算机一个信号，这些信号相间隔的时间为 Δt，把各激光束之间的距离称为 Δl，$\Delta l/\Delta t$ 即为各区段的平均速度。因为计算机一般能在一秒钟内计算 10^6 次，所以信号间隔分辨率为一微秒，如果弹体飞行速度为3000米/秒，则一微秒中的飞行距离约为0.3厘米。可见两个相距一米的激光器，输入信号的间隔达333次之

多，所以时间测量是可以很准确的。

纸靶法是把一批薄纸片，分开放置在弹体轨迹线上，大体上垂直于轨迹线。假定弹体穿过薄纸片时给弹体运动的影响可以略去不计，纸片上留下的弹孔部位，可以用以计算轨迹线的形状。弹孔本身的形状可以用来测定弹体在飞行时，和轨迹线相交的夹角取向。

轨迹线上弹体的平均速度，是用测量通过一定间隔距离所需时间来决定的。监测弹体到达的方法有许多种。有的在纸片上附有印刷电路或电路网，当弹体通过时，电路发生阻断或接通；也有用光电池的光束、电磁传感器、或同步照相来测定的。用任何传感系统进行测定，都应考虑到在这种速度内所可能产生的影响传感作用的各种空气弹道现象。例如，在超军用弹速范围内，弹体前方有激波，这种激波可能提前阻断电路，也可能使空气离子化，从而使电磁探测器产生各种假象。

我们常常只好在撞击点前的一定距离之外测定弹体速度。当弹体飞行一定距离之后，才能到达靶体，于是由于空气阻力，这个先测到的速度必须修正，才能是正确的撞击速度。在许多情况下，计算空气阻力的阻力系数并不清楚，为了估计阻力，人民常需测量两个相邻区域的速度，从速度减少来估算阻力。

（2）撞击传给靶体的运动的测定

人们往往忽视弹体撞击靶体时传给靶体的运动。其实这个运动对撞击速度是有影响的。我们可以用弹道摆测量撞击时靶体的运动，测得它在撞击中和靶元一起运动时所达到的最大摆移，用动量守恒定律，我们可以从这种摆的位移计算靶体所获得的动量。最近的研究[2-40,2-61](1969, 1974) 指出，在撞击中，由于弹体把一部份动量传给了靶体，而撞击速度有所修正。因此，有关弹道摆的实验技术，重新受到了注意。

（3）撞击后弹体、靶体的形状尺寸变化的测定

对弹体或靶元碎块运动的测定，包括把碎块收集、拼凑复原而又不损坏或少损坏碎块的方法，主要依靠照相或 x 射线纪录，

或两者并用的方法。如果碎块较多，要从连续许多张相片上，分析每一碎块的速度和运动方向，并不是容易的。我们用弹道摆技术，可以测得这个系统的总动量，再从收集碎块的各种数据，就能估计这个系统各个部分的运动速度。

对于靶体和弹体形状尺寸变化的数据收集，主要是指测定靶元上弹坑的主要尺寸，即对坑深、坑的直径和坑的容积的测定，以及对弹体的最后长度、直径、弹头变形和质量的测定。有些分析方法和比较精细的数值计算方法，在某些方面可以用来予测到撞击系统的一些最后外形，但还没有标准的方法，可以用来研究外形变化的一切具体细节。

人们也用弹体和靶元的切片的金相检验，来观察它们的内部变化，例如金属微结构的变形和变化，内部断裂的产生，和绝热剪应变(即很严重的局部剪应变)的地点；还有从绝热剪应变所引起的断裂，它代表着挤凿穿透破坏的开始阶段。也可以看到由尖弹头产生的晶粒形状的歪变。还有人用层压的材料制成靶体，于是撞击所产生的内部变形就可以很明显的观察出来了。

人们可以用照相来观察撞击的二维图象。这些数据，既可以在几个不同的时间上，分别摄制有坐标线条的二维相片来获得，也可以把相片的某一空间坐标变为时间坐标，用一维照相，将照相机按一定的速度扫射摄制条纹照相。后者需要一维的视场能提供撞击系统的重要信息，例如靶体某一部分的位移，或弹体在直线轨迹线上运动等。这种方法有两个有利方面，即一维照相是连续的，并且光学系统以及照相胶片业已有可能提供一定程度的精确度。有人研究出了条纹照相和坐标照相联合使用的设备，可惜没有公开的资料文献。

在一系列的时间间隔上，相继逐一摄制一批有坐标线条的二维撞击相片，很明显，这种照相对撞击系统各部分间的相对位置，提供了丰富的资料。当用这些相片来决定弹体和碎片的轨迹线时，其结果的精确度是由光学系统的分辨率、爆光时间、和一秒钟能照几张相的摄制速度等因素所决定的。广泛地说，能满足

这种要求的系统，应该有电影摄影机，旋转镜摄影机，和电、光的图象变换系统。电影摄影机有较长的摄影记录时间，但当摄制速度较高时，得到胶卷的精确运动的机械问题就越来越困难。在高速摄制这类相片时，我们一般采用高速转镜系统。这种高速度的照相技术的缺点是只能在较短的摄影记录时间中使用。电光系统的基础是电光快门，它的优点是爆光时间非常短，但这种系统一次所得的相片张数是不多的。象用克尔（Kerr）电池这样的电光快门，当关闭时仍能漏出一小部分的光，则对于光强很高而且在摄制间隙中仍有强光的问题，就不很适用。撞击本身不发光，所以照相系统的光源问题很重要。这里有多种照相技术，最简单的是阴影照相。它用一个很小和很强的光源，最好和研究对象相比起来小到可以当作点光源；将它放在视场的后面，把不透明的对象的阴影投射在底片上。这种光源既可以是脉动的，又可以是用快门管理的，也可以和"对焦阴影照相"的透镜系统一起使用。还有的简单地用一般的漫射光作为背境，给照相提供一个均匀光线场作为衬底。对于撞击系统近旁空气密度有变化时，可以用许连仑（Schlieren）系统，它对空气密度的变化最敏感，如果弹体和碎片运动中有激波产生时，用许连仑照相特别有效。所有这些技术的详细说明，见海照（W. Hyzer）所著《工程和科学用高速照相术》(1962)[2-62]一书。当碎块的运动和分布很复杂时，全息照相肯定是一种很有希望的研究技术，在目前已经开始有了一些研究报告[2-63]。

现在还发展了一些测定表面位移场历史过程的技术，人们把这种表面位移场的历史变化过程叫做应力波效应，或其它内部干扰。这些技术有光学杠杆法、激光干涉法、针接触器法。有的方法还利用了电容扩音器原理，和各种各样应变仪的技术，其详细内容见福劳斯（G. R. Fowles）的报告（1972)[2-64]。

X射线照相术，是又一种基本上采用阴影照相原理研究撞击系统的技术。这种射线能穿透靶体进口和出口处的各种碎块，也能观察在撞击的穿透破坏后，弹体和靶体的碎裂细节。脉冲X射

线系统也可以在运动弹体相垂直方向观察弹体的运动，这种观察所得的数据，可以用来决定轨迹线在三维空间中的位置[2-65]。

超高能的脉动X射线系统业已成功使用，这种射线有能力穿透靶元，把撞击穿透破坏过程的内部情况显示出来，象内部空穴形状等都能观察。这种技术也能用来观察弹击体内部的扰动，运用冲击动力理论中应力和冲击传播速度的关系，这种系统还是一种决定系统内应力和应变分布的更好工具。

§2.7 超高速弹体加速器

为了研究超高速撞击现象，我们首先要有弹体加速器，使弹体能获得超高速的运动。超高速弹体加速器基本上可以分为两类，即枪型加速器和爆炸加速器。

枪型加速器包括一切有枪管导射弹体的加速器；用爆炸加速器加速的弹体基本上是不用导射装置的。

枪型加速器按其加速方法分为：（1）轻气枪加速器；（2）电磁枪加速器；（3）爆炸驱动枪加速器和（4）爆炸丝加速器等四种。爆炸加速器分为（1）锥形定向装药加速器；（2）等离子体拖吸加速器和（3）静电加速器等三种。

在1964年，曾有人对美、英、加拿大三国的加速器进行了调查[2,66]。据说当时共有151套在运行的加速器设备，其中有83套（55%）是双级的轻气枪加速器。这种加速器的速度只能达到1万米每秒，但弹体的尺寸、重量、材料和形状，似乎不受什么限制。这一点是轻气枪加速器的特点，是其它加速器所比不上的；而且，对弹体的重量和尺寸可以精确测定，对发射速度也可以精确预测，这也是它所以深受欢迎的理由之一。

为提高速度，人们可以在轻气枪加速器上增加电能或爆炸能，但这只是在低性能要求的轻气枪加速器上有效。

锥形定向装药加速器所得速度比轻气枪加速器高，可以达到106万米每秒左右，但是它所能发射的弹体，在形状和材料方面都受到限制，而且测定弹体的质量和形状的方法都不是直接的，

其精确也远不如轻气枪加速器。

最高弹体速度能由等离子体拖吸加速器获得，约可达 2 ～ 3 万米每秒左右。但这种加速器所能发射的弹体是质量很小的玻璃球，只有10^{-7}克左右，而且它的完整性也不是毫无疑问的。

静电加速器能获得28万米每秒这样的高速度，但弹体的质量更小（直径约为0.2微米的小球）。所以弹体和弹坑的测定都很困难。

现在逐一介绍这些加速器：

（1）双级轻气枪加速器

首先发明和做成双级轻气枪加速器的，是美国新墨西哥矿业学院的克洛齐（W. D. Crazier）和虎姆(H. Hume)(1948)[2-67]，通常称为NMSM加速器。其简图如图2-3。在火药室中的推进剂燃烧后，气体压力上升，胀破第一层隔片，冲出的气体推动活塞在泵管内向右运动；在压缩轻气（一般是氢气）的压力下，胀破第二层隔膜；高压氢气推动弹体在发射管中前进。此后的轻气枪加速器有各种不同的变化，例如，在火药室周围可以装满轻气，也可以把火药装在泵管一侧，从而不用火药室，有时也可以不用轻气和一块隔片。

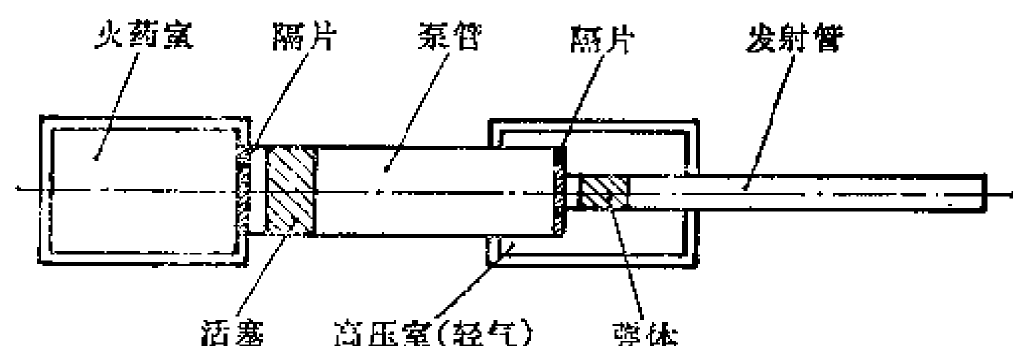


图2-3 双级轻气枪加速器简图

泵管和发射管的截面面积变化有突变型的，如阿诺特工程发展中心（AEDC）的加速器[2-68]，也有渐变型的，如美国宇航局的阿姆斯研究中心（Ames NACA）的加速器[2-69]，和通用汽车公司国防研究实验室（GMGRA）的加速器[2-70]。图（2-4)为

洛卡西维兹（J. Lukasiewicz）[2-71]所得的各种双级轻气枪加速器的发射速度和发射总重量的关系曲线，其数据范围从0.044克的发射速度1.13万米每秒（37千英尺/秒），一直到2500克的发射速度4千米每秒(13千英尺/秒)。

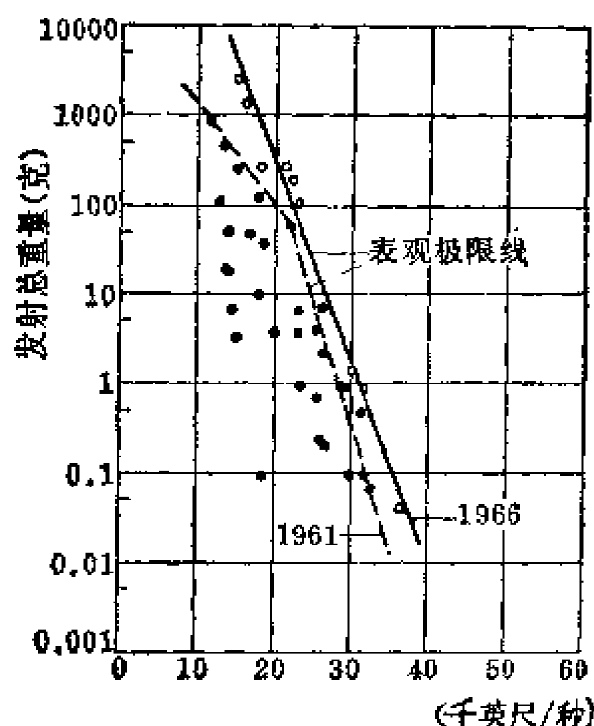


图2-4　双级轻气枪加速器所获最高弹速和弹重的关系

发射总重量包括弹体本身和它的衬套的重量，这种衬套是使弹体密合发射管，并使发射管的管口不受破坏所必需的装置。在发射管的管口处，衬套由于机械原因或空气动力学原因而和弹体分离。衬套一般是用聚碳脂这样的聚合物制成的。衬套对弹体也有保护作用。

轻气枪加速器的有效理论，分别由美国海军兵器研究所的柏塞西[2-72]和弹道研究所的柏安（P. G. Baer）[2-73]得到。他们引用了冯诺埃门的激波理论[2-55]，其结果能预测弹体的加速度和发射速度[2-74]。

在目前，口径为1.27厘米（即0.5英寸）和0.56厘米(即0.22英寸）的枪管，能发射的弹体的极限速度，约在1～1.1万米每秒

左右，人们想了不少方法来提高其速度。爱格门（J. Eckerman）[2-75]和海军研究实验室的斯维夫脱（H. F. Swift）[2-76]，曾用在泵管中放电的方法来加热气体，以提高弹体速度；荷威尔（W. G. Howell）[2-77]则用在发射管中放电加热的方法，来提高弹速；也有把活塞的动量直接带到发射管的方法[2-78]；还有使衬套在收口的枪口中受挤压而停止运动，而把衬套的动量传给弹体的方法[2-79,2-80]。斯维夫脱曾用这些方法把弹体速度从2700米每秒增加到4600米每秒；用1.27厘米的枪管，曾把弹体速度从6400米每秒增加到7500米每秒。所有这些提高弹速的技术，只适用于较低的弹速范围，对于原已高速的轻气枪而言，这些方法都不适用。

（2）电磁枪加速器

电磁枪加速器有两种类型，一种是感应线圈枪加速器，它的原理同感应电动机原理。弹体放在长线圈的里面，在电磁场的作用下，弹体在长线圈的中间产生加速运动，弹体自己能调整其对称轴和长线圈的轴线相重合（见图2-5）。

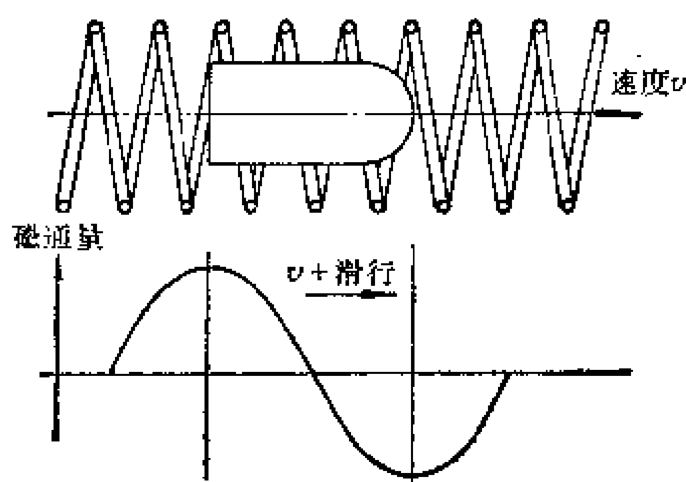


图2-5　感应线圈枪的工作原理

我们可以变化线圈中电流的频率，或变化线圈绕距，使弹体上的涡电流受变化着的磁通量的作用，而使弹体产生加速运动。这种电磁枪的困难，是怎样供应一百万千瓦那么大功率的多相脉冲电源，而其频率又要求能在几赫芝至几十万赫芝之间变化。关

国天顶无线电研究公司的萨里斯堡（W. W. Salisbung）[2-81]曾做过一台四个线圈的加速器，每个线圈各有自己的电源。他使2.4克的弹体获得350米每秒的速度。他也曾试验过怎样获得较高速度，但以线圈和弹体的崩溃碎裂而告终。

还有一种电磁枪是双轨枪或直流电枪，是美国装甲研究基金会制成的[2-82]，它有两根互相平行的导电轨道，弹体和轨道接触，并能滑行，当轨道上以弹体本身作为导体而接通直流电时，弹体在磁场中根据左手定则受力而获得加速度（图2-6)。双轨枪的能源要求很高，常要在高电压下工作。为了避免双轨间发生短路，要在真空室里工作，但在接触点附近很易发生电弧。美国MB协会[2-83]曾制成一台能发射0.0024克的尼龙球到6000米每秒的速度。以后又制成第二台能发射0.01克的弹粒达到9500米每秒的速度，但这台加速器在2兆高斯的高磁场压缩作用下被压碎了[2-84]。

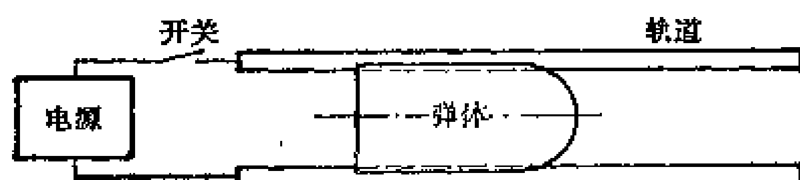


图2-6　双轨枪加速器简图

（3）爆炸驱动枪加速器

不少人曾设法在枪的发射管内用增设的火药爆炸，使弹体在加速运动中获得更多的推力。象美国弹道研究实验室曾制成了“带药推进枪”[2-85]，这种枪的弹体中，带着自备的火药，象火箭似的在发射长管中加速。这样的装置有两个优点：（1)弹体的加速度较低，且是均匀的，这样就减小了弹体在发射中受损坏的可能性；（2)从理论上讲，除了相对论性的问题外，弹道可以无限增大。当然，这种装置也有缺点：（1)需要一根很长的发射管；（2)要求有燃烧速度很高的燃料推进剂，其燃烧速度要比一般推进剂约高三倍；（3)由于燃烧速度高，推进剂可能发生爆炸。到目前为止，为了对付燃烧时发生的高压，将弹体结构重量增大；

但为了得到超高速度，弹体结构重量是越小越好。这种想法的先进性是大家都理解的，可是一直还达不到目的。

法兰克福兵工厂[2-86]曾制成过一种发射器，用几次烈性炸药爆炸，使弹体得到一次又一次的推力，每次爆炸后都有一定的间歇。如果分两次爆炸，曾使7.5克重的弹体得到2600米每秒的速度。但在实验中，发现控制起爆时间是很困难的。

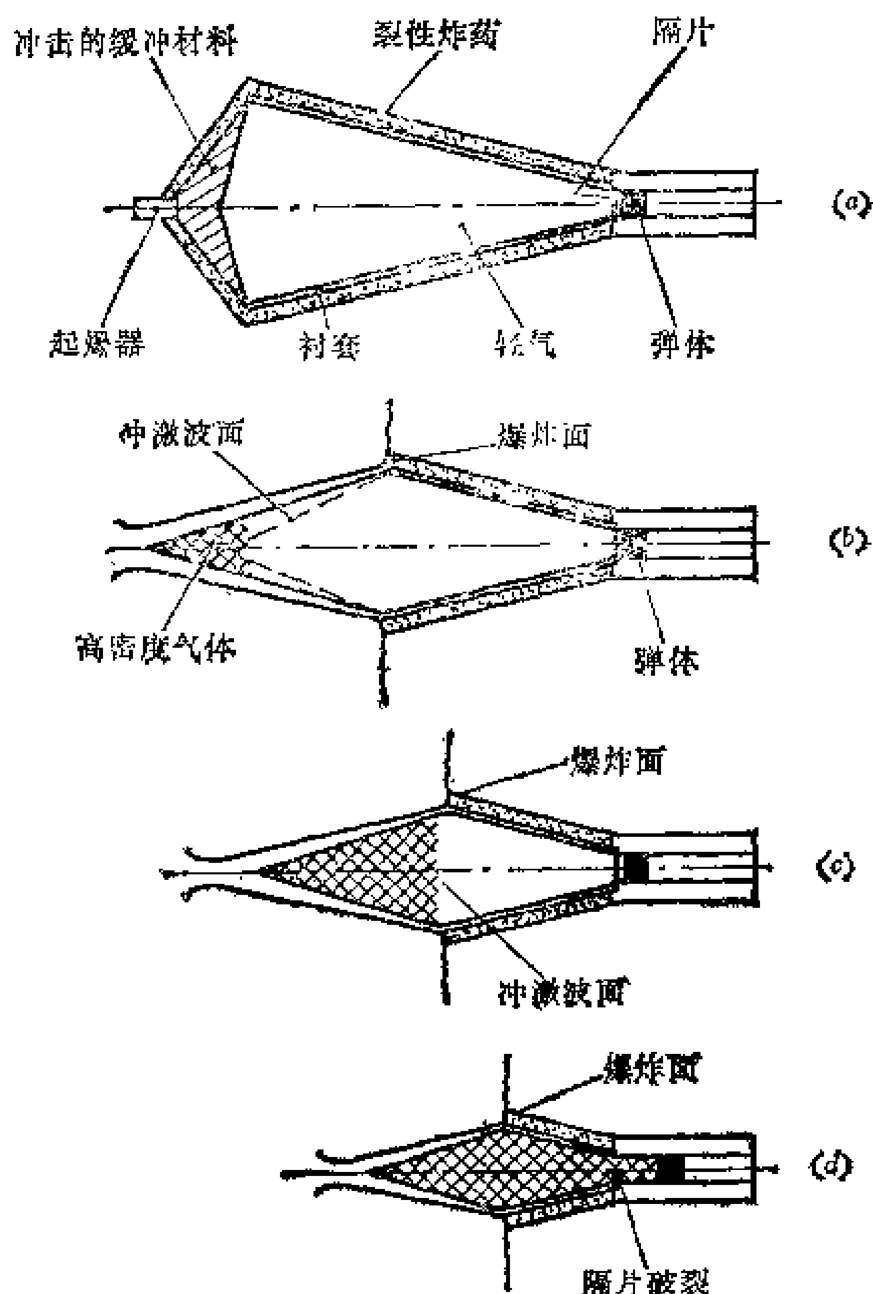


图2-7　倒塌中的衬套锥形装药枪

(a)—未起爆时的装药枪；(b)、(c)、(d)—随着装药的爆炸，衬套在不同时期的位置。

“国际物理学”组织（PI）和斯坦福研究所（SRI），曾从事一种很有前途的超高速加速技术的研究[2-87,2-88,2-89]。他们在金属衬套❶的外侧装上烈性火药，这种火药是从后面开始起爆燃烧的。如果衬套是锥形的，则燃烧中就产生锥形装药的效果。当然，在倒坍中的衬套的锥角太小了，不足以使金属形成射流，但使衬套中贮存的轻气（如氢和氦）形成了射流，这种射流中的气体速度几乎达14万米每秒。图2-7是解释锥形衬套在倒坍过程中的作用示意图。曾有报导说，在用圆柱形衬套后，可以使0.1克重的弹体得到8000米每秒的速度，也有发射102克重的弹体得到5800米每秒速度的情况。

（4）爆炸丝加速器

当一个高压电容器通过细金属丝快速放电时，细金属丝会发生爆炸，爆炸丝加速器就是从爆炸金属丝中得到的能量来加速弹体的。图2-8是美国技术业务公司的许劳（V. E. Scherrer）设计的爆炸丝加速器[2-90]。在这个加速器内，压力容器中有一水箱，而爆炸丝是泡在水箱里的，发射管是真空的。水箱和发射管用塑料薄片隔开。用一种0.00025英寸的铝箔，通过500焦耳的能量放电，可以使0.125克重的弹体得到2500米每秒的速度。

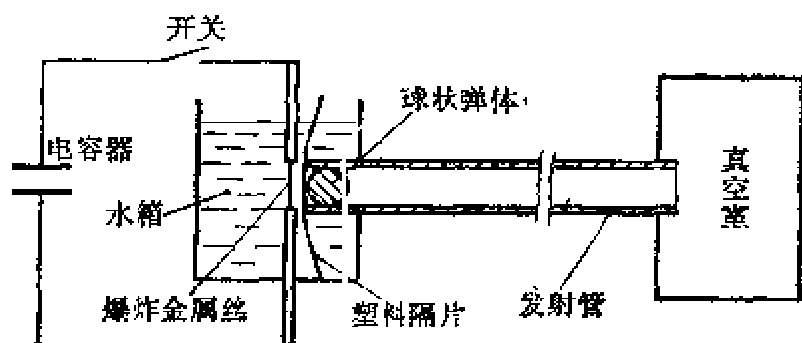


图2-8 爆炸丝超高速加速器

克拉克（W. H. Clark）（美国空军材料试验室）[2-91]曾研究过这类加速器的另一种安排，它被称为爆炸箔背带加速器，见

❶ 这种金属衬套亦称药型罩。—编者注

图2-9。在这种加速器中，背带中的电流造成排斥由爆炸箔产生的等离子体的磁场，从而加速等离子体，也加速了弹体——它是从塑料薄片上切割下来的一个小圆饼。这块小圆饼的质量可以用轻质靶体的动量的测定来决定。轻质靶体是由薄铝片包着较厚的泡沫板所制成的。用这种加速器，可以使0.0008克重的圆饼获得10700米/秒的速度。这种加速器的缺点为：（1）难以测定弹体的形状和质量；（2）只能用以发射塑料圆饼。

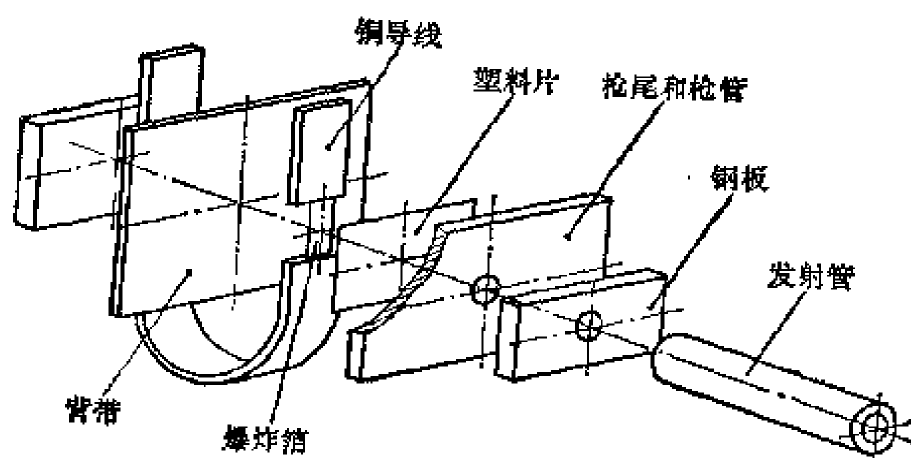


图2-9　爆炸箔背带加速器装配示意图

（5）烈性炸药和锥形装药加速器

保特（T. C. Poulter）[2-92]和维里葛（F. J. Willig）曾把弹体放在烈性火药的表面上，或埋藏在烈性火药里面而得到加速度（图2-10）。为了防止烈性炸药爆炸而损坏靶体，人们用挡板来隔离，或把炸药装成定向锥形而使爆炸的波及面缩小。在爆炸时，弹体在发射中也可能遭受损坏，人们为此将弹体埋在炸药里面，或在弹体和炸药之间放上惰性材料。在抛射板形弹体时，板常发生翘曲。

还有基里斯坦（R. H. Christain）[2-94]、克拉克（E. N. Clark）等[2-95]和克尼克（J. H. Kineke, Jr）[2-96]所指出的用以抛射弹饼的空穴烈性炸药加速器（图2-11）。它曾把弹饼抛射到9100米/秒这样高的速度。毕加廷纳兵工厂[2-97]曾把8克铝饼的速度抛射到4750米/秒，把0.18克弹饼速度抛射到5010米/秒。

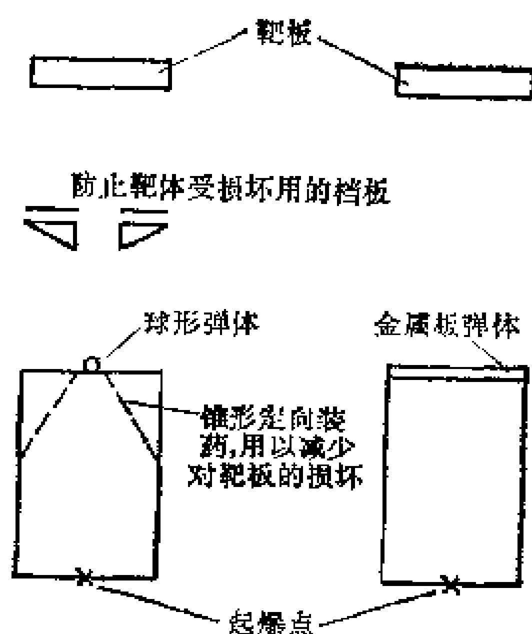


图2-10 各种烈性炸药加速器

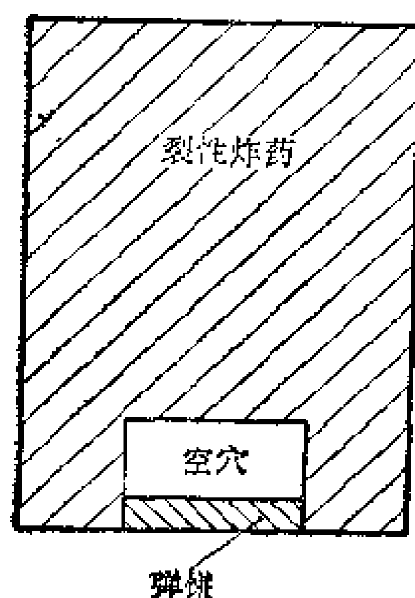


图2-11 空穴烈性炸药加速器简图

通用空气射流公司的克里营海根（K. N. Kreyenhagen）等[2-87]曾报导了一种靶板加速器，它把靶板加速，使它和不动的

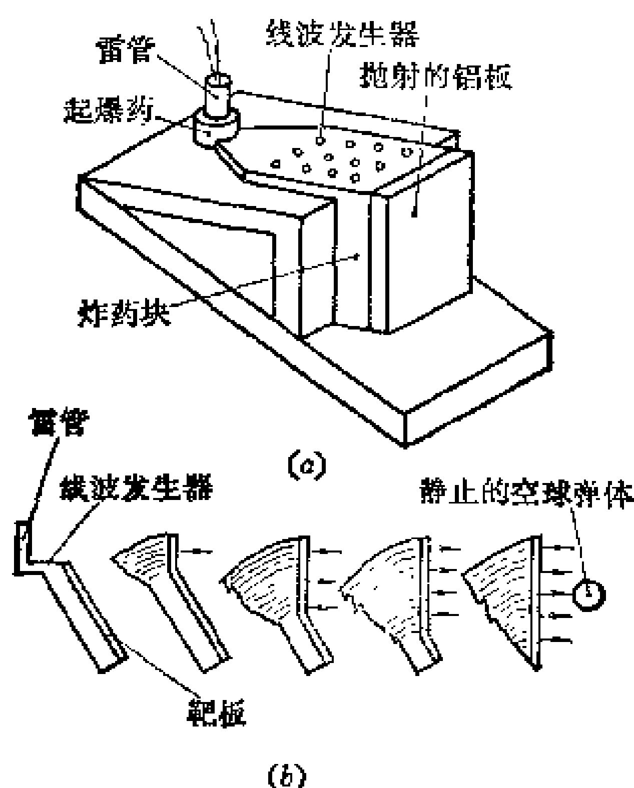


图2-12 靶板加速器

（a）靶板加速器示意图；（b）靶板掀开和加速过程。

弹体撞击。靶板盖在炸药块上，用线波发生器点燃起爆，靶板被爆炸掀起并加速，如图2-12所示。

用本法曾把一块铝板加速到3500米/秒。当弹体是易碎的材料所制成，而且承受不了发射的加速度时，本法是一种很适宜的撞击试验法。

最常用的爆炸加速器是锥形定向爆炸加速器（图2-13）。弹体是从锥形衬套● 化为射流时形成的。这种药罩在爆炸中形成射流，这种射流有速度梯度，所以当射流向前射出时，本身渐渐拉伸展长，最后碎裂为许多弹体，再由于偏心点燃起爆而产生横向的扩散分布，使这些碎块弹体分别撞击靶板。由于射流起始散裂时，或多或少是杂乱无章的，所以，各个碎块弹体的速度、质量、形状、尺寸以及取向，都必须在撞击前测定，一般地可以用垂交的X射线阴影图测定。药罩材料即碎块的材料。锥角改变时，所得碎块的速度也不同。锥角越小，速度越高。有人曾用这种装置获得了10,000米/秒这样高的速度[2-37]。

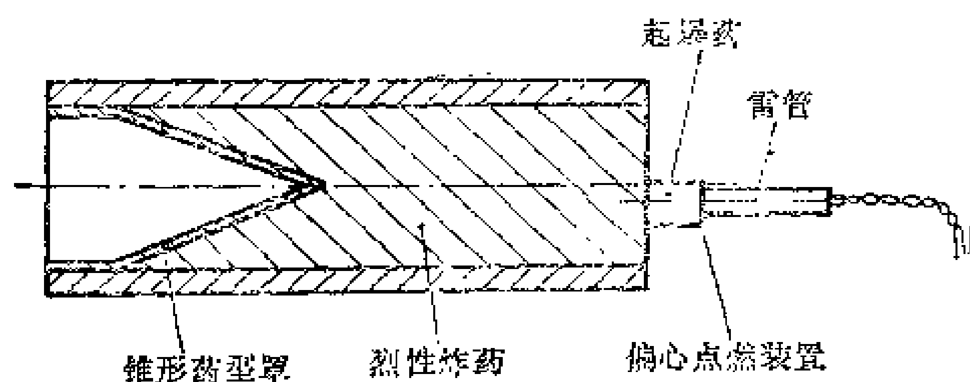


图2-13　锥形装药的爆炸加速器

装有碎块吸入器的锥形装药爆炸加速器如图2-14。人们用这种塑料制成的碎块吸入器，吸入除第一块大碎块以外的一切射流碎块。当第一块大的碎块弹体冲在前面，它先把半圆形的炸药起爆，从而推动这个加速器向一边倾侧，使以后的所有碎块射流都射到碎块吸入器上，而不再射向靶体。戈林（J. WG. ehring）

● 这种衬套亦称药型罩。——编者注

等[2-88]和温塞尔（A. B. Wenzel）[2-90]曾用这种装置，把重0.08克的铍制弹块射到16500米/秒这样的速度。这种加速器能得到很高速度的碎块金属弹体，但它的主要缺点是无法控制碎块弹体的形状和它的质量。

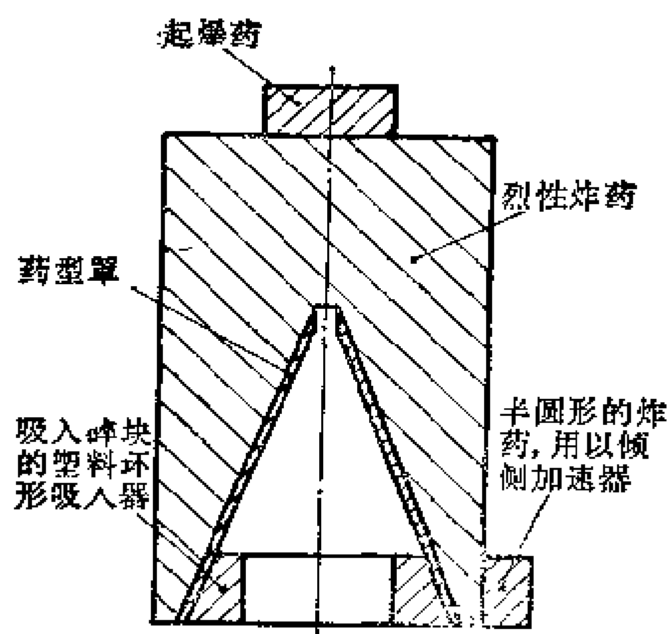


图2-14　装有碎块吸入器的锥形装药爆炸加速器

（6）等离子体拖吸加速器

高速等离子体对于弹体的拖吸作用，可以被用来加速弹体到超高速的范围。现在有两种等离子体拖吸加速器，第一种见图

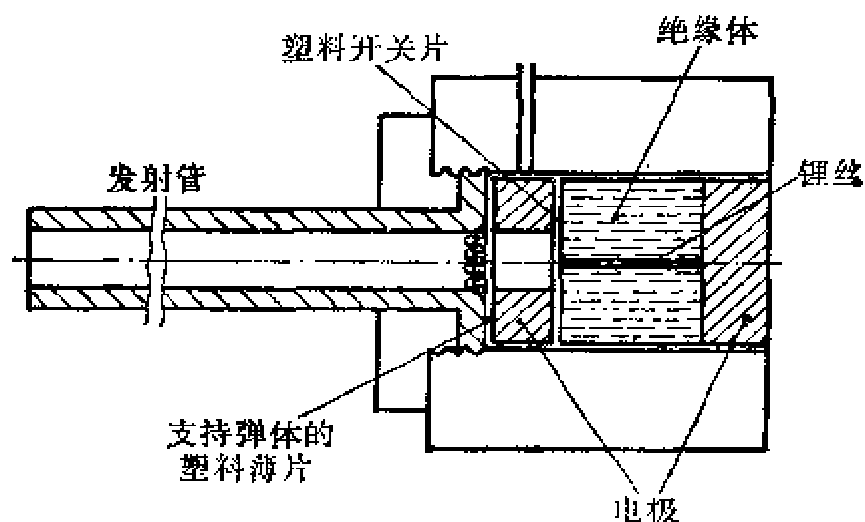


图2-15　等离子体拖吸加速器(一)

2-15，

从高容量的电容器通过锂丝放电时，锂丝爆炸产生高速等离子体，把支持弹体的塑料薄片胀破，等离子体射流拖吸着这些弹体沿着发射管前冲，一直把这些弹体加速到超高速范围。一次能发射 10000 个50微米直径的玻璃球。用电磁快门和挡板把不在发射管轴向运动的一些小球消除掉，也可以消除掉那些运动较慢的小球，这种加速器的详细报导，见斯克莱（C. N. Scully）和柏泵佛（F. G. Poseverb）等的报告[2-100,2-101,2-102]。它所得的玻璃球（重1.46×10^{-7}克）最高速度为20千米/秒。

这种加速器所发射的弹体材料，在一方面受不熔化于高温的特性限制，它们必须在这样高温的等离子体态仍是透明的，在另一方面，必须是球形的，这是因为我们采用了光学方法，以监测这些弹体是不是完整的。上述斯柯莱等的工作所用弹体，只限于50微米直径那么小的小球。

另一种等离子体拖吸加速器见图2-16。它是波克逊[2-103]和卡尔逊[2-104]所设计的。

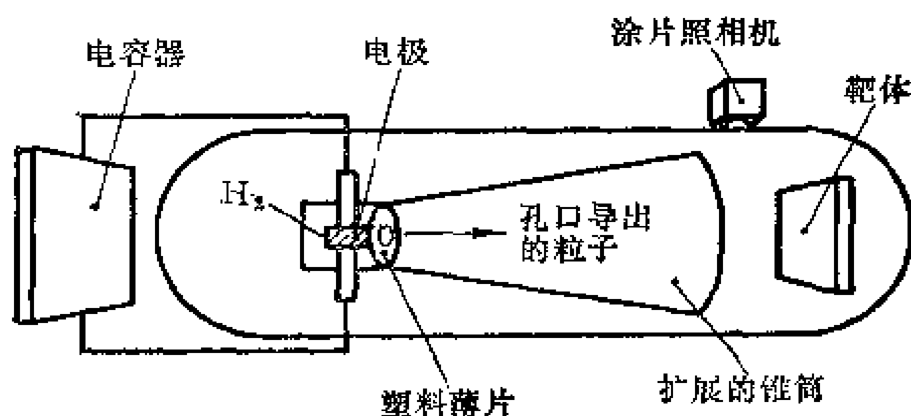


图2-16　等离子体拖吸加速器(二)

他们把电容器的电能通过放电注入氢气室，通过氢气的电弧造成氢等离子体，当它按锥形加速器而膨胀时，带着弹体加速。卡尔逊报导，曾用这种加速器把0.0014英寸直径的玻璃小球（重5.9×10^{-8}克）加速到30,000米/秒这样的高速。

（7）静电加速器

TRW系统公司的弗里赫脱尼赫脱(J. F. Früchtenicht)[2-105]曾报导了一种静电加速器（图2-17)。它用100KV 静电压把很小(直径为1.5微米）的羰基铁粒子加速至1700米/秒这样的速度。靶体上受到许多粒子的撞击，他们把弹坑的有关参数，用统计方法和粒子的有关参数连系起来，有监测器测定粒子的速度和荷电量；还有两套相互垂交的板片，用以测定粒子的轨迹线。

后来这种静电加速器是用2MV的房特葛赖夫(Vande Grabb)机供给加速的势能[2-106]。

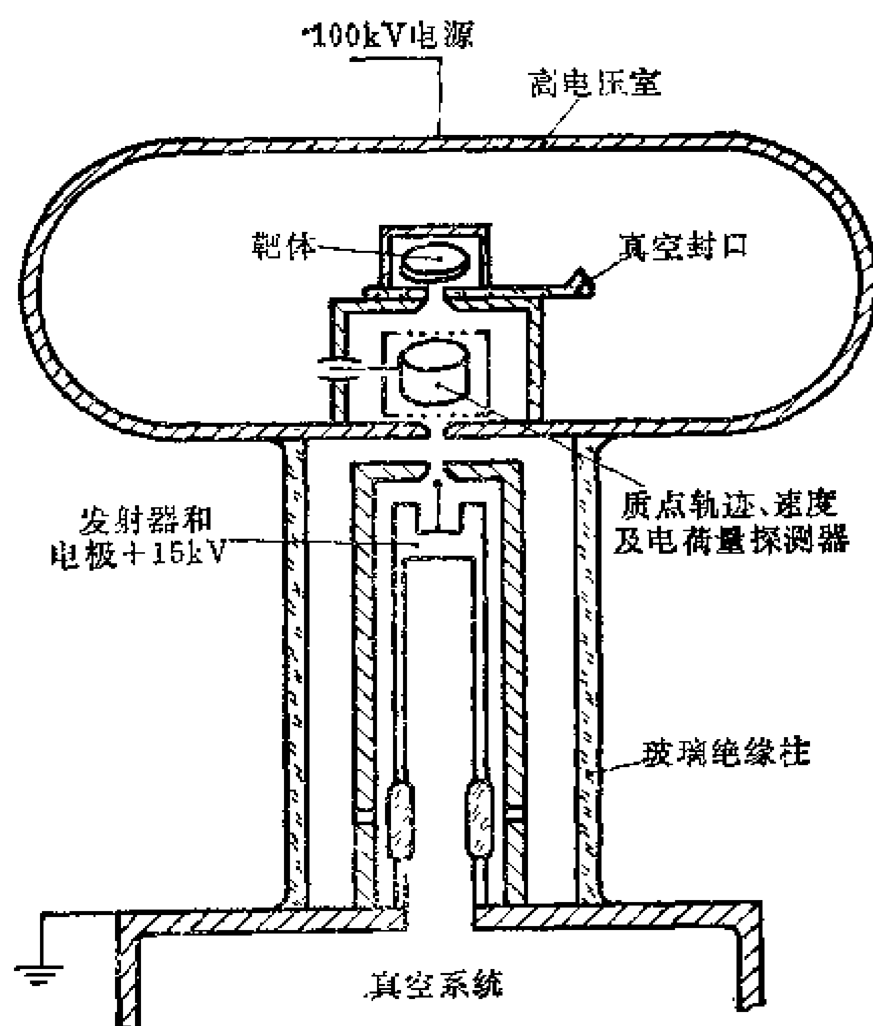


图2-17　静电加速器简图

参考文献

〔2-1〕 D. R. Christman and J. W. Gehring, Journal of Applied Physics, 37 1579, (1966).

〔2-2〕 A. Tate, Theory for the Deceleration of Long Rods After Impact, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 15 (6), pp. 387-399, (1967).

〔2-3〕 A. Tate, Further Results in the theory of Long Rod Penetration, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 17 (3), pp. 141-150, (1969).

〔2-4〕 R. F. Bishop, R. Hill, and N. F. Mott, Proc. Phys. Soc., 57, 147, (1945).

〔2-5〕 J. K. Dienes and J. M. Walsh, in 'High Velocity Impact Phenomena' (Edited by Ray Kinslow), pp. 45-104, (1970).

〔2-6〕 R. J. Eichel berger and J. W Gehring, Effects of Meteoroid impacts on Space Vehicles, ARS. J 32 (10), P. 1583, (1962).

〔2-7〕 W. A. Allen, E. Mayfield and H. Morrison, Journal of Applied Physics, 28, P. 370, (1957).

〔2-8〕 W. A. Allen, E. Mayfield and H. Morrison, Journal of Applied Physics, 28, P. 1331, (1957).

〔2-9〕 Picatinny Arsenal, Progress Report, No 4 and 5; Arco Corporation, Contract No. DAAA21 71-C-0517(1971).

〔2-10〕 B. L. Schulman and F. R. Lascher, Proc. lst International Symposium on Ballistics, American Defence Preparadness Association, Washington, D. C(1974).

〔2-11〕 P. Beynet and R. Plunkett, Experimental Mechanics. 11, p. 64, (1971).

〔2-12〕 J. Awerbuch and Bodner, International Journal of the Solids and Structures, 16, 671. (1974).

〔2-13〕 G. Hurckhardt and W. Struth, Bericht 6/42, Ballistisches Institute der Luftkriegsakademie, Berlin-Gatow(1942).

〔2-14〕 N. Rostoker, Meteoritics, 1, 11, (1953).

〔2-15〕 R. J. Eichelberger and J. W. Gehring, American Rocket Society Journal, 32, p. 1583(1962).

〔2-16〕 G. Birckhoff, D. P. MacDougall, E. M. Puch and G. I. Taylor, Journal of Applied Physics, 19, p. 563 (1948).

〔2-17〕 E. M. Puch, R. J. Eichelberger, and N. Rostoker, Journal of Applied Physics, 23, p. 532 (1952).

〔2-18〕 D. C. Park and W. M. Evans, Proceeding of Physics Society (London), B64, p. 298 (1951).

[2-19] W. A. Allen and J. W. Rogers, Journal of the Franklin Institute, 272, p. 275 (196).

[2-20] G. H. Abrahamson and J. N. Goodier, Journal of Applied Physics, 34, p 195 (1963).

[2-21] Mark L. Wilkins, Lawrence Livermore Laboratory Report, UCRL-7322, Rev. I (1969).

[2-22] H. A. Balmer, Massachusetts Institute of Technology. Technical Report, ASRL, TR. 128-3 (1965).

[2-23] G. A. Frazier and C. M Petterson, Report DNA 331F, Washington D. C., Defence Nuclear Agency (1974).

[2-24] G. A. Sweet, G. A. Frazier and H. E. Read, Report, SSS-IR-2830, System, Science, and Software, LaJolla, California, (1976).

[2-25] S R. Woodall, J. F. Heyda, H. J Galbraith and L. L. Wilson, AFATL-TR 70-112, Air Force Armament Laboratory, Eglin Air Force Base (1970).

[2-26] G. R. Johnson, Analysis of Elastic Plastic Impact Involving Severe Distorsion, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 43(3), pp 439-443 (1976).

[2-27] G. R. Johnson, High Velocity Impact Calculations in Three Dimensions, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 44(1), pp. 95 100 (1977).

[2-28] G. R. Johnson, Proc. 3rd International Symposium of Ballistics, American Defense Preparedness Association, GIV, Washington, D. C. (1977).

[2-29] L. D. Bertholf and S. E. Benzley, TOODY II, A Computer Program for Tmo Dimensional Wave Propagation, SC-RR-68-41, Sandia Laboratories, Abburquerque, New Mexico(1968).

[2-30] J. M. Walsh et al, Report 3 SR-350, Systems, Science and Software, LaJolla, California(1970).

[2-31] L. J. Hageman and J M, Walsh, BRL Report No. 37, AD 725 998, USA. Ballistic Reseach Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland(1971).

[2-32] L. J. Hageman and E. P. Lee, Final Report, SSS-R-76-2961, System, Science and Software, LaJolla, California (1976).

[2-33] W. E. Johnson, OIL: A Continuots two-dimensional Eulerian Hydrodynamic Code, General At. Report, GAMD-5580(1965).

[2-34] R. T. Sedgwick, In Proc. Army Symposium on Solid Mechanics, pp. 209-219, AMMRC MS 73-2, AD 772-827(1973).

[2-35] R. T. Sedgwick and J. M. Walsh, BRL Report, 3 SR-348, U S. A. Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland

(1971).

〔2-36〕 R. T. Sedgwich and L. T. Hageman, In Proceeding of International Conference in Dynamic Crack Propagation, pp. 679–691, Noordhoff, Amsterdam(1972).

〔2-37〕 R. T. Sedwick and L. J. Walsh, In Proceeding of Ist International Symposium in Ballistics, IV-45, American Defense Preparedness Assoc., Orlando, Florida(1974).

〔2-38〕 J. M. Walsh and J. H. Tillotson, Hydeodynamics of Hypervelocity Impact, Proc. Symp. Hypervelocity Impavt, 6 th, Firestone Tire and Rubber Co. Akron, Ohio, 2, 59 (1963).

〔2-39〕 J. W. Gehring, JR, Theory of Impact on Thin Targets and Shields and Correlation with Experiment, High-velocity Impact Phenomena (edited by R. Kinslow), 105–156 (1970).

〔2-40〕 W. E. Johnson, Ballistic Research Laboratories, Contractor Report, BRL-CR-338 (1977).

〔2-41〕 W. E. Johnson, General Atomic Report GAMD-7310 (1967).

〔2-42〕 W. E. Johnson, AFWLTR-70-144, Air Force Weapons Laboratories, Kirtland Air Force Base (1971).

〔2-43〕 F. H. Harlow, Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-2321 (1959).

〔2-44〕 R. T. Sedgwick and S. R. Woodall, Interim Report, Contract No. F-08635-67-C-0079, Eglin AFB (1967).

〔2-45〕 E. J. Halda and T. D. Riney, Document No. 66SD409, General Electric Company, Missile and Space Division, Philadelphia Pennsylvania (1966).

〔2-46〕 T. D. Riney, TIS No. R64SD13, General Electric Company, Missile and Space Division, Philadelphia, Pennsylvania (1964).

〔2-47〕 N. B. Brooks and R. L. Lansdale. SAMSO-TR-68-69, Space and Missile System Organization, Norton Air Force Base, California(1968).

〔2-48〕 L. D. Bertholf, L. D. Buxton, B. J. Thorne, R. K. Byers, A. L. Stevens and S. L. Thompson, J. of Applied Physics, 46, 3776(1975).

〔2-49〕 M. Rosenblatt, K. N. Kreyenhagen and W. D. Romine, AIAA Journal, 8, 1009(1970).

〔2-50〕 M. L. Wilkins, Report UCRL-7322, Lawrance Livermore Laboratory, Livermore, California(1963).

〔2-51〕 D. L. Orphal, W. F. Borden and J. E. Reaugh, DNA 3685F, Defense Nuclear Agency, Washington, D. C. (1975).

〔2-52〕 M. H. Wagner, Proc. Army Symposium on Solid Mechanics, 1972, pp. 197–208, AMMRCMS 73-2, AD 772827, Watertown, Massachusetts (1973).

[2-53] H. E. Read Report BSD-TR-67-191, Shock Hydrodynamics, Sherman Oaks, California, Lockheed Missile and Space Division, Report LMSC-D-000017(1967).

[2-54] A. P. Boresi, Elasticity in Engineering Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1965).

[2-55] J. Von Neumann and R. D. Richmyer, A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks, Journal of Applied Physics, Vol. 21, pp. 232-237, (1950).

[2-56] J. M. Walsh, et al, Shock Wave Compressions of Twenty-Seven Metals, Equations of State of Metals, Physical Review, Vol. 108(2)' pp. 196-216 (1957).

[2-57] R. T. Walsh, Finite-Difference Methods, Dynamic Response of Material to Intense Impulsive Loading, edited by P. C. Chou and A. K. Hopkins, Air Force Materials Laboratory, pp. 363-403(1972).

[2 58] T. Tillotson, Report GA-3216, General Atomics (1962).

[2-59] R. T. Sedgwick, L. J. Walsh and B. J. Kohn, Report AFATL-TR-74-201, Air Force Armament Laboratory, Eglin Air Force Base (1974).

[2-60] Thomas E. Fields, Report ARML-TR-69-202, Air Force Systems Command, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio (1969).

[2-61] Rodney F. Recht and Thomas W. Ipson, Report NWC TP 5648, Naval Weapons Center, China Lake, California(1974).

[2 62] William Hyzer, Engineering and Scientific High Speed Photography, MacMillian, London (1962).

[2-63] J. D. Trolinger, Optical Engineer, 14, 383(1975).

[2-64] G. R. Fowles, In Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loadings, pp. 405-480, Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio (1972).

[2-65] Chester Grabarek and Louis Herr, BRL Technical Note 1643, U. S. Army Material Command, Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Ohio (1972).

[2-66] J. L. Harp, D. N. Gideon and R. A. Stein, Hypervelocity Projector Facilities, Battelle Memorial Inst, BAT-197-21-4 (1964).

[2-67] W. D. Crozier and H. Hume, J. Applied Physics, 28, 892 (1957).

[2-68] W. E. Stephenson and D. E, Anderson, Performance of Two Stage Light Gas Modal Launchers, Annal Meeting IAS, 30th, New York (1962).

[2-68a] M. E. Load, Performance of a 40-mm Combustion-Heated Light Gas Gun Launcher, AEDC-TN-60-176 (1960).

[2 69] J. S. Curtis, Aa Accelerated Reservior Light Gas Gun, NASA TN

D1144 (1962).
[2-70] A. C. Charters and J. S. Curtis, High-Valocity Guns for Free Flight Ranges, TM 62/207, GM Defense Research Laboratory (1962).
[2-71] J. LuKasiewicz, Constant Acceleration Flows and Applications to High Speed Guns, AEDC-TR-66-181 (1966); AIAA Journal, 5(11) (1967).
[2-72] R. Piacesi, D. F. Gates, and A. E. Siegal, Computer Analysis of Two Stage Hypervelocity Mode Launcher, NOL TR 62-87 (1963).
[2-73] P. G. Baer and H. C. Smith, Experimental and Theoretical Studies on the Interior Ballistics of Light Gas Guns, Symposium Hypervelocity Impact, 6th, Cleveland, Ohio (1963).
[2-74] J. R. Dewitt and A. J. Cable, A Comparison of Experimentnl and Theoretical Launcher Kinematics, AEDC-TR-65-203 (1965).
[2-75] J. Eckerman and W. L. Mckay, Performance of a 3-stage Arc Heated Light Gas Gun, Proc. Symp. Hypervelocity Impact, 6th, Cleveland, Ohio, 1, 247 (1963).
[2-76] H. F. Swift, A Study of Electrically Augmented gas guns, Proc. Symp Hypervelocity Impact, 7th, Tampa, Florida (1964).
[2-77] W. G. Howell and J. P. Kottenstette, Electrical Augmentation techniques, AEDC-TR-65-32 (1965)
[2-78] J. P. Koltenstette and W. G. Howell, The Travelling reservoir Light Gas Gun and Development and analysis on a Third Stage Accelerator for a Light Gas Gun, Symp. Hypervelocity Impact, 7th, Tampa, Florida (1964).
[2-79] W. G. Howell, R. F. Recht, and T. W. Ipson, Hypervelocity Augmentation Techniques, Symp. Hypervelocity Impact, 6th, Cleveland, Ohio (1963).
[2-80] W. C. Cooley, A Shock Plasma acceleration Technique for Velocity Aumentation, Symp. Hypervelocity Impact, 7th, Tampa, Florida (1964).
[2-81] W. W, Salisbury, A Four-Coil Inducttion Accelerator, Symp. Hypervelocity Impact Effects, 2nd, Washington, D. C. (1957).
[2-82] K. W. Miller and R M. Bergslein, Study of Electromagnetic Gun, Symp. Hypervelocity Impact Effects, 2nd, Washington, D. C. (1957)
[2-83] D. F, Brast and D. R, Sawle, Study of a Rail Type MHD Hypervelocity Accelerator, Symp. Hypervelocity Impact, 7th, Tampa, Florida (1964).
[2-84] R. L. Chapman, D E. Harms and G. P. Sorenson, The Magneto-Hydrodynamic Hypervelocity Gun, Symp. Hypervelocity Impact, 6th, Cleveland, Ohio (1963).

[2-85] P. G. Beer, The Travelling Charge Gun as a Hypervelocity Launching Device, Symp Hypervelocity Impact, 4th, Eglin AFB, Florida (1960).

[2-86] W. F. Fogg and C. W. Fleisher, Acceleration of Projectiles with the Sequenced High Explosive Impulse Launcher, Symp. Hypervelocity Impact, 4th, Eglin, AFB, Florida (1960).

[2-87] C. S. Godfrey, Gas Ejectors for Hypervelocity Projection, Symp. Hypervelocity Impact, 7th, Tampa, Florida (1960).

[2-88] E. T. Moore, D. Mumma, C. S. Godfrey and D. Bernstein, Explosive Gas Guns for Hypervelocity Acceleration, Symp. Hypervelocity Techniques, 4th, Tullahome, Tennessee (1965).

[2-89] J. K. Crosby, S. P. Gill and G. F. Fowles, Explosive Compression and Acceleration of Helium for Hypervelocity Acceleration, Symp. Hypervelocity Techniques, 4th, Tullahome, Tennessee (1965).

[2-90] V. E. Scherrer and P. T. Richards, Ann Exploding Wire Hypervelocity Prpjector, Symp. Hypervelocity Impact, 4th, Eglin, AFR, Florida (1960).

[2-91] W. H. Clark, A. K. Hopkins, J. E. Myrberg, R. W. O'Neil, V. E. Scherrer and M. C. Stevens, AFML Exploding Foil Gun, Development, Diagnostics, Data. Symp. Hypervelocity Impact, 7th, Tampa, Florida (1964).

[2-92] T. C. Poulter, Acceleration of Small Particles With High Explosives, Symp. Hypervelocity Impact Effects, 2nd, Washington, D. C. (1957).

[2-93] F. J. Willig, Acceleration of Masses to Hypervelocities by Explosive Means, Symp. Hypervelocity Impact Effects, 2nd, Washington, D. C. (1957).

[2-94] R. H. Christian, R. F. Duff and F. L. Yarger, Equation of State of Gases by Shoch Wave Measurements II. The Dissociation Energy of Nitrogen, J. Chem Phys. 23 (11), 2045(1955).

[2-95] E. N. Clark, A Mackenzie, F. H. Schmidt, and I. L. Kintish, Studies of Hypervelocity Impact on Leads, Symp. Hypervelocity Impact, 4 th, Eglin AFB, Florida(1960).

[2-96] J. H. Kincke, Jr., An Experimental Study of Crater Formation in Metallic Targets, Symp. Hypervelocity Impact, 4 th, Eglin AFB, Florida, (1960).

[2-97] K. N. Kreyenhagen, J. E. Ferguson, R. R Randall and J. P. Joyce, Special Explosive Projectors, I. Shaped Charge Accelerator, II. Target Plate Accelerator, Symp Hypervelocity Impact, 6th, Cleveland, Ohio (1963).

〔2-98〕 J. W. Gehring, Jr., D. R. Christian and A. R. McMillan, Hypervelocity Impact Studies Concerning the Meteriod Hazard to Aerospace Materials and Structure, Conf. AIAA Structure Materials, 5th, Palm Springs, California (1964).

〔2-99〕 A. B Wenzel and J. W. Gehring, Jr., Techniques for Launching 0.01 to 0.25 gram Discrete Projectiles at Velocities up to 54, 100 ft/sec, Symp. Hypervelocity Impact Techniques, 4 th, Tullahome, Tennessee, (1965).

〔2-100〕 C. N. Scully and P. L. Cowan, Hypervelocity Gun for Micrometeorite Impact Simulation Empolying Capacitor Dischare in a Condensed Phase, Symp. Hypervelocity Impact, 4 th, Tampa, Florida (1960).

〔2-101〕 F. C. Posever, F. L. Rish, and C. N. Scully, An Evaluation of Impact Effects on Micrometeoroid Shielding Configurations for velocity up to 60,000 ft/sec., Ann. Conf AIAA Structures and Materials, 5 th, Palm Springs, California (1964).

〔2-102〕 C. N. Scully, E. A. Escallier, F. D. Rosen and J. D. O'keefe, Electrothermal Gun for Hypervelocity Ballistics Research, Symp. Hypervelocity Impact, 7 th, Tampa, Florida (1964).

〔2-103〕 D. Bloxson, Experimental Production of Hypervelocity Pellets by Means of Condenser Discharges into Hydrogen, Symp. Hypervelocity Impact, 4 th, Eflin AFB, Florida (1960).

〔2-104〕 R. F. Carlson and J. A, Fager, Effects of Hypervelocity Impact on Semi-infinite Plate and Spacecraft Hulls from 18.000 fps to 100,000 fps, Conf. AIAA Structure and Materials, 6 th, Palm Springs, California (1965).

〔2-105〕 J. F. Friichtenicht and B. Hamermech, Ballistic Impacts by Microscopic Projectiles, Symp. Hypervelocity Impact, 4th, Eglin AFB, Florida (1960).

〔2-106〕 J. F. Friichtenicht, J. C. Slatery, D. O. Hanson, Electrostatic Accelerators-Experimental Techniques, Symp. Hypervelocity Impact, 7th, Tampa, Florida (1964).

第三章　弹 体 特 性

§3.1　弹 体 分 类

弹体是按其发射方法和按其所携带的物资及其功能来分类的。按其发射方法，弹体可以分为三类：

（1）用枪炮发射的，象枪弹、炮弹等；

（2）由运载工具投射的，象炸弹、水雷、地雷等；

（3）自行推进投射的，象火箭、飞弹、鱼雷等。

按其所携带的物资及其功能分类时，也可以分为三类：

（1）动能弹体　目的是为了侵入靶体；设计这种弹体时，只考虑它所具有的动能；

（2）装药弹体　目的不是为了侵入靶体，而是为了在接近靶体时发生爆炸，这种弹体的弹头内一般装有炸药或燃烧剂；

（3）动能和装药兼顾的弹体　其目的既要能侵入靶体，而且在靶体内又能发挥爆炸或燃烧的破坏作用，亦即能达到破坏靶体功能的作用。

§3.2　动能侵入体(穿甲弹)

为有效地侵入靶体而设计的几种动能弹体见图3-1。穿甲弹一般有一个硬质弹核，在弹核上由于外弹道和内弹道的需要而安装着各种部件。例如，为了取得自旋稳定性而增设的弹带；为了取得空气动力学效率而设置挡风屏；为了使轨迹线看得见而增设的曳光装置。这些部件有的能增加射程；有的使弹体取向获得较好的条件，使它易于钻进靶体。当然，所有弹体在增设了这些部件后，一般的性能就比仅有弹核的弹体要差一些。但是，为了实现其它特殊的功能，使总体功能略受损失，也是值得的。例

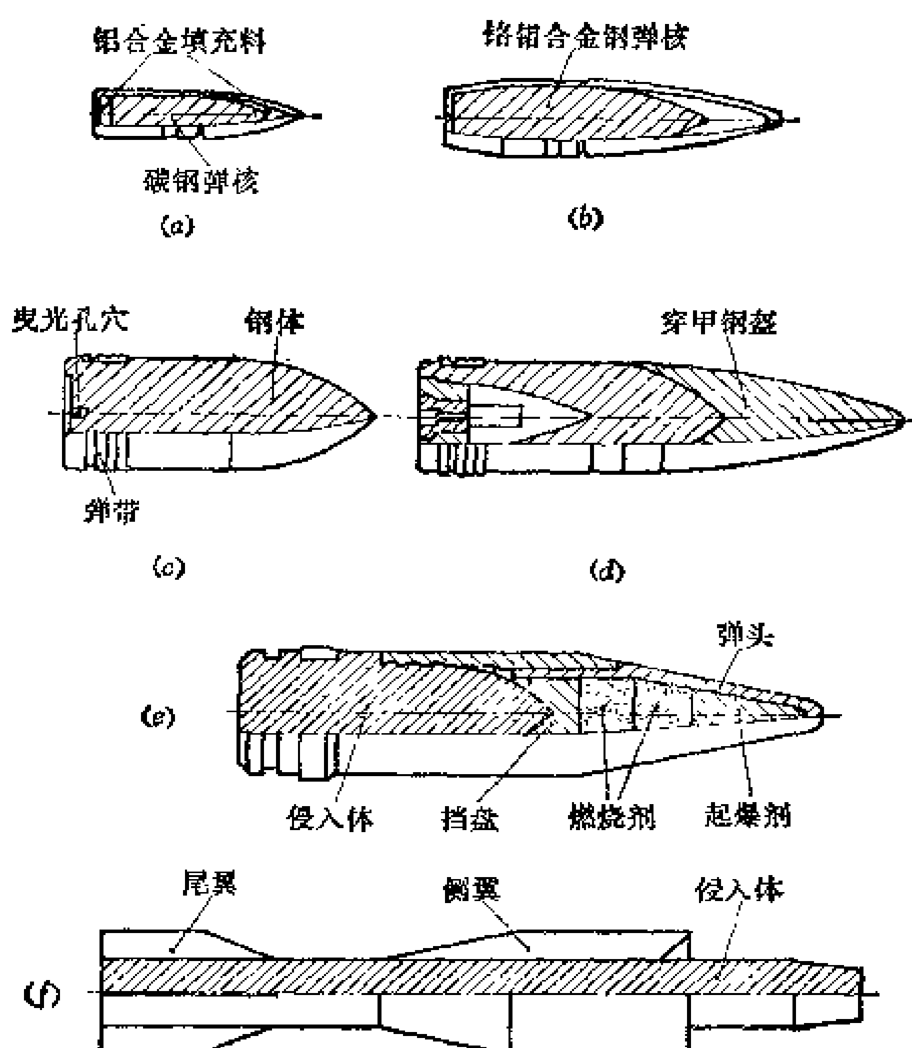


图3-1 动能弹体的实例

(a) 钢心弹；(b) 合金钢心弹；(c) 穿甲钢心弹；(d) 穿甲爆破弹；(e) 穿甲燃烧弹；(f) 翼稳飞弹。

如，挡风屏可以使弹道极限速度增加约 5 %。在一般设计挡风屏时，首先应该考虑弹核和侵入体本身的基本性能的变化，同时也要研究挡风屏对于弹体轨迹线的影响[3-1]。在相图中决定弹体的弹道极限速度所需要的弹体参量为：弹体质量 m；弹体尺寸，包括长度 L_A、直径 D、弹头形状和弹头长度 L_N；以及侵入体的密度 ρ_P。这是描述侵入体的最低限度的一组参数。如果要决定弹体的变形和它的碎裂极限曲线，则尚需有关材料强度的一些数据。

图 3-2 为弹体以 60 度或小于 60 度的斜角撞击 SAE4130 钢板（硬度 HB230，厚度 6.35 毫米）后的几种典型变形情况。当接近垂直方向撞击钢板时，弹体主要发生压缩变形和碎裂；当斜度较大时，弹体主要发生弯曲变形和弯曲断裂。在撞击相图中，决定完整穿透的各种间界线时，其破坏准则较简单，一条间界的破坏准则是根据压缩破坏的临界应力，另一条边界的破坏准则是根据弯曲型破坏的临界弯矩。例如，美军的弹体《侵入方程手册》（A Penetration Equation Handbook，1977）[3-1] 载录一个量 χ^*，它是用来衡量弹体碎裂的：

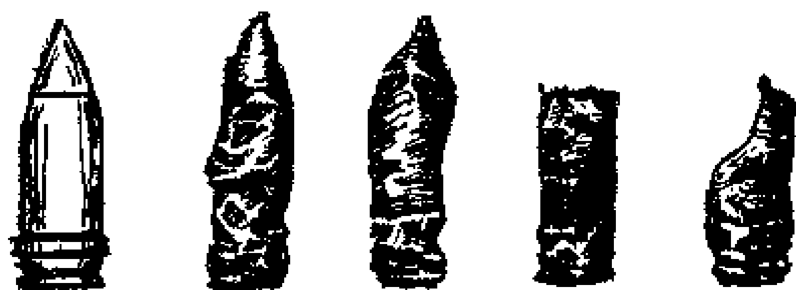


图3-2　撞击后弹体的几种变形情况

$$\chi^* = \frac{16 m v_{50}^2 \sin[\cos^{-1}(\cos\theta\cos\phi)]}{\pi B \sigma_{YP} D^3 \cos\theta} \tag{3.1}$$

它是弹体在撞击中所受弯矩和破坏弯矩之比。当 $\chi^* = 1$ 时，弹体发生弯曲破裂。方程中 θ 为入射斜角；ϕ 为弹体对轨迹线的倾角；$B = 11.2 \sim 0.022\mathrm{BHN}$；$D$ 为弹体直径；v_{50} 为撞击极限速度；m 为弹体质量。

焦纳斯（1976）[3-2] 曾用连续介质力学模型研究了弹体在垂直撞击下的变形。在他的研究中，使用的物态方程里只含有 E、ν 两个弹性常数和 σ_{YT}、σ_{UT} 两个强度应力。

§ 3.3　装药的侵入体

携带炸药、并能侵入靶体达相当深度的弹体见图 3-3。这种弹体的主要部份是它的主体本身和装有烈性炸药的部分，当然引

爆剂也是装药弹体的关键部份。

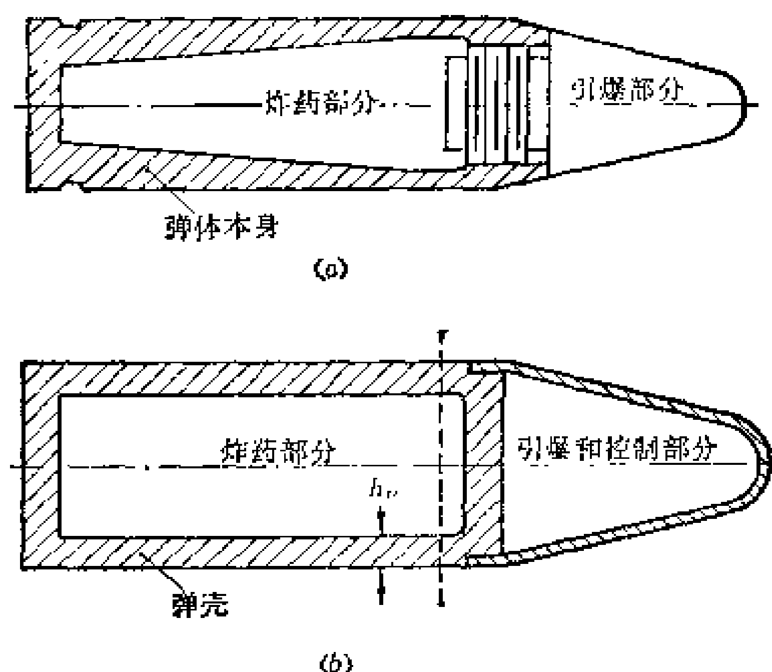


图3-3 装药弹体的实例

（a）烈性炸药弹体；（b）受控导弹的装药弹头（h_p = 弹壳厚）。

这种弹体必须既能深入靶体而又能保持结构不受损坏，或保持引爆装置仍能正常工作。这就是说，弹体在深入靶体时，既要避免引爆装置失灵，也要避免炸药提前爆炸，从而失去了深入靶体进行爆炸的预期破坏功能。很易看到，侵入能力和爆炸性能之间是有矛盾的。设计这种装药弹体时就在于解决这个矛盾。解决这个矛盾的关键在于正确选用弹壳的厚度 h_P。它一定要足够厚，在穿透厚度为 h 的靶板或装甲时，弹体不会发生破坏[3-3]。对于钝头弹体而言，壳厚 h_P 是用下列公式估算的：

$$h_P = h\left(\frac{\sigma_{St}^D}{\sigma_{YTP}}\right)\left(\frac{\hat{m}}{m}\right) \tag{3.2}$$

其中 $\hat{m}$ 为弹体前半部份的质量，在图 3-3（b）上，它是指虚线前面弹头那一部份；m 为弹体总质量；σ_{St}^D 是靶元材料的动力剪切强度；σ_{YTP} 为弹体的拉伸屈服强度。

现在让我们来证明这个公式。

当弹体钻透靶板，达到了弹肩以后，靶板上的弹孔不再扩大，

靶板和弹壳接触面上的接触阻力等于靶板中的最大剪应力（即抗剪强度 σ_{St}^{D}）的合力 F，而且这个合力在以后的弹体运动中不再变化，是个常量。它等于

$$F=\sigma_{St}^{D}\pi Dh \tag{3.3}$$

其中 D 为弹体直径。设弹体的总质量为 m，这个阻力 F 的作用造成了弹体的减速度 A，则

$$|A|=\frac{1}{m}F=\frac{1}{m}\sigma_{St}^{D}\pi Dh \tag{3.4}$$

设穿过了靶板的弹体部份的质量为 $\hat{m}$，则这部份弹体的前冲惯性力应该等于 T

$$T=\hat{m}|A|=\frac{\hat{m}}{m}\sigma_{St}^{D}\pi Dh \tag{3.5}$$

它对弹体的另一部份是一种拉力。设炸药本身没有强度，其承担的拉力可以略而不计。全部拉力将由弹壳负担，弹壳所能承担的最大拉应力为弹壳材料的拉伸屈服强度 σ_{YTP}，亦即弹壳所能承担的容许最大拉力为 $\pi Dh_{P}\sigma_{YTP}$。所以只要 T 小于这个容许拉力，则弹体在该处是安全的；大于这个容许拉力，弹体就发生拉伸破坏。临界条件为

$$\pi Dh_{P}\sigma_{YTP}=T=\frac{\hat{m}}{m}\sigma_{St}^{D}\pi Dh \tag{3.6a}$$

或可写成

$$h_{P}=h\left(\frac{\sigma_{St}^{D}}{\sigma_{YTP}}\right)\left(\frac{\hat{m}}{m}\right) \tag{3.6b}$$

本式和（3.2）式完全相同。从本式可以看到，弹体越向前运动，$\hat{m}$ 越大，则保持弹壳安全的 h_{P} 就越大，即弹壳越厚。所以，装药弹体的最经济最安全的弹壳厚度设计应该是越往弹体尾部，弹壳越厚。图 3-3 *a* 的弹壳设计就比图 3-3 *b* 的设计合理。

烈性炸药弹的相图和穿甲弹的相图，有基本相同的特性，它们都有几个涉及引爆装置失效或提前爆炸的相。装药弹体的密度较低，抗压和抗弯的强度较差。总的说来，弹道极限速度有所提高，完整穿透的相区有所压缩。

§3.4 弹体参数

决定穿透过程和靶体抗拒作用的主要因素是弹体的外形，尖头弹体的穿透过程是一种刺穿性的模式，它对靶体的破坏主要集中在弹体轴线的四周。另一方面，钝头弹体所造成的穿透则是一种挤凿性的模式，它对靶体的破坏波及到一个圆柱形面或一个圆锥面。这两种破坏模式的分界线是由弹体的外形决定的。当然它也和弹体及靶体的材料和尺寸有关。但是迄今为止，人们对这类关系还不是十分清楚的。对中等厚度的靶体而言，人们曾用实验测定和理论分析对弹体在穿透过程中所承受的压缩力、惯性力、和摩擦阻力进行了研究，从而弄清了弹体外形和穿透破坏模式之间的关系[3-4]。对于锥形弹头的弹体而言，尖头、钝头、假尖头、假钝头的定义如下：设 α 为弹头的半锥角：

尖头	$\alpha \leqslant 14^\circ$
假尖头	$14^\circ < \alpha \leqslant \alpha_c$
假钝头	$\alpha_c \leqslant \alpha < 90^\circ$
钝头	$\alpha = 90^\circ$

其中 α_c 为临界半锥角，它的值一般在 30° 和 50° 之间，它是由靶元厚度 h 和弹体直径 D 的比值 h/D 决定的。参考文献〔3-1〕所规定的尖钝准则比较简单，它的规定是

尖头	$L_N/D > 1$
钝头	$L_N/D \leqslant 1$

其中 L_N 为弹头部份的长度，D 为弹体直径。参考文献〔3-1〕中还指出：弹体主轴和飞行轨迹线之间的夹角对穿透破坏的模式也有一定影响，这个因素是可为弹体外形的一个方面来研究。即使是一个尖头的弹体，如果弹体飞行时的章动角 $\phi \leqslant 10^\circ$，则撞击靶体时，一样会产生钝头似的穿透破坏模式。

第七章中将介绍一些弹道极限速度的经验公式，对于尖头的和钝头弹体而言，其弹道极限速度公式是略有差异的。一般说来，尖头弹体所受阻力较小。七十年代初，有人用实验[2-65]研究了五

种弹形的弹体射击薄靶元时所经受的侵入阻力。这些实验结果后来又有人用理论分析予以证实[3-5]。其结论为：尖头弹体比钝头弹体所受穿透阻力小。根据这些实验数据，尖头或钝头弹体的穿透效能是靶板的相对厚度 h/D 的函数；有关这一方面的详细情况将留待第七章中讨论。但有一点是值得提出的，即对于尖头和钝头弹体的穿透过程的本质理解，是建立侵入阻力公式的关键和基础。以（2.1）式中的第一式和第三式为例，它们也可以分别写成

$$\frac{P}{D_0}=\frac{\alpha_1'\rho_p}{4}\left[\frac{4m}{\rho_p\pi D_0^3}\right]v_0^2 \tag{3.7a}$$

$$\frac{P}{D_0}=1.125\left[\frac{\rho_p}{\rho_t}\right]\left[\frac{4m}{\pi\rho_p D_0^3}\right]\ln(1+a_3 v_0^2) \tag{3.7b}$$

这里引进了一个因子 $4m/(\pi\rho_p D_0^3)$，如果注意到有一颗圆柱形弹体，其质量和实际弹体相同，其直径也就是实际弹体的直径，则 $m=\frac{1}{4}\rho_p\pi D_0^2 L$，其中 L 为这颗圆形弹体的长。于是很易看到

$$\frac{4m}{\pi\rho_p D_0^3}=\frac{L}{D_0}=\text{细长比} \tag{3.8}$$

这个细长比参数有一个特点，它代表着弹体的主要尺寸的比例，这个比例和弹头的实际形状无关。从（3.7）式中可以看到，弹体的细长比越大，以及弹体的密度越高，弹体对靶板的相对侵入深度比（P/D_0）就越高。弹体在侵入过程中，一般产生直径增大的变形。这就指出，理想的弹体是形状不易变化的弹体，即理想刚性的弹体。钢、碳化钨和耗竭了放射性的铀都是制作侵入体的理想材料。铀具有密度高的有利条件，但使用这种重金属的撞击条件将由于易碎的脆性而受到限制；钢也还算是比较重的，而且有较好的韧性，既比较便宜，又易于获得，所以大量用钢来制作弹体。

上面的讨论指出：弹体越细越长就越好。但是细长的弹体有两个不利因素：（1）易于出现弯曲型破坏；（2）对于翼稳弹体而言，易于出现外弹道失稳。为了避免外弹道失稳，人们设计了

不少用尾翼获得飞行稳定的弹体，如图 3-1（f）。许多用于钻入土壤的炸弹，都是用尾翼稳定和展长弹体来克服空气动力学的外弹道失稳问题的（见第六章）。

§3.5 弹体和轨迹线的取向

在研究弹体和靶体撞击时，人们常把弹体沿着靶体正面的法线方向（指向靶内）的撞击作为标准典型的撞击问题，这种撞击称为垂直撞击，也称为斜角为零的撞击或零斜角撞击。斜角 θ 指弹体速度矢量和进入靶体正面的法线之间的夹角。这种传统的习惯规定和下列其它规定对任何斜角都适用：

（1）当弹体穿越靶元后，并未偏离原方向，则称为斜角不变；

（2）弹体穿越靶元后，沿和正面平行的靶体背面的法线方向离开时，这个弹体的撞击必为零斜角撞击；

（3）回跳的弹体轨迹线的斜角必大于 90°。

人们习惯上常用靶板正面上的外向法线作为表达斜角的参考矢量。于是入射弹体的斜角恰为我们采用的定义的斜角的补角（即外向法线和弹体速度矢量的夹角），而且回跳弹体的斜角就一定小于 90°了。

弹体的飞行取向角指弹体的正方向（即弹轴指向弹头的方向）和飞行轨迹线上弹体的瞬时速度矢量之间的夹角，见图 3-4 a。在研究末端弹道学时，斜角是一个重要参量，因为它是弹体速度矢量和靶元正表面的内向法线之间的夹角。我们将在空间取一空间坐标系，这个坐标系的原点在弹尖上，其中一个轴即和弹体速度矢量 $\vec{v}$ 重合，用 $\vec{v}$ 和靶板内向法线 $\vec{n}$ 的共有平面为这个坐标系的一个坐标平面，和这个坐标平面相垂交的方向为这个坐标系的另一坐标轴，称为前倾轴（pitch axis），速度矢量和前倾轴所共有的平面为另一坐标面，第三坐标轴垂交于这个平面，面且称为偏航轴（yaw axis）。所以，我们的空间坐标系是前倾轴、偏航轴以及速度矢量轴所组成的直角坐标系。弹体轴线和偏航轴之间

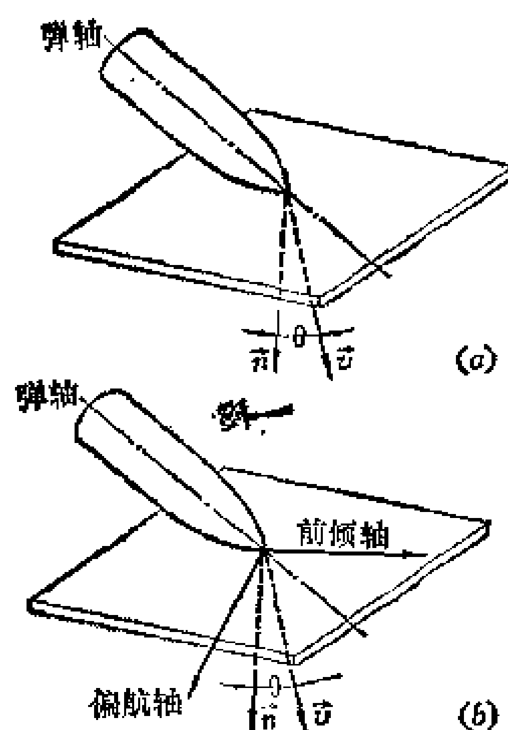


图3-4　定义斜角和飞行取向的弹体、靶体相对位置和坐标

$\vec{n}$—内向法线（靶体）；$\vec{v}$—速度矢量（弹体）；

θ—撞击斜角。

的夹角称为偏航角（yaw），弹体轴线和前倾轴之间的夹角称为倾角或仰角（pitch）。图 3-4 б 为弹头取向、撞击方向、弹体和靶板的相对位置示意图。

§ 3.6　刚塑性弹体、撞击变形的泰勒理论(1948)[3-6]

弹体变形和靶体变形之间，在撞击过程中是密切相关的，显然不能单独考虑。但是，在一定条件下，人们还是可以略去靶体的变形，从弹体的变形估计弹体材料的动力屈服强度。最早而又最简单的是泰勒（G. I. Taylor）[3-6]在 1948 年研究的柱形弹体对半无限靶元的垂直撞击。泰勒曾假定弹体材料是理想刚塑性，而靶体则是完全刚性的，撞击只引起弹体变形。此后李和托保（E.

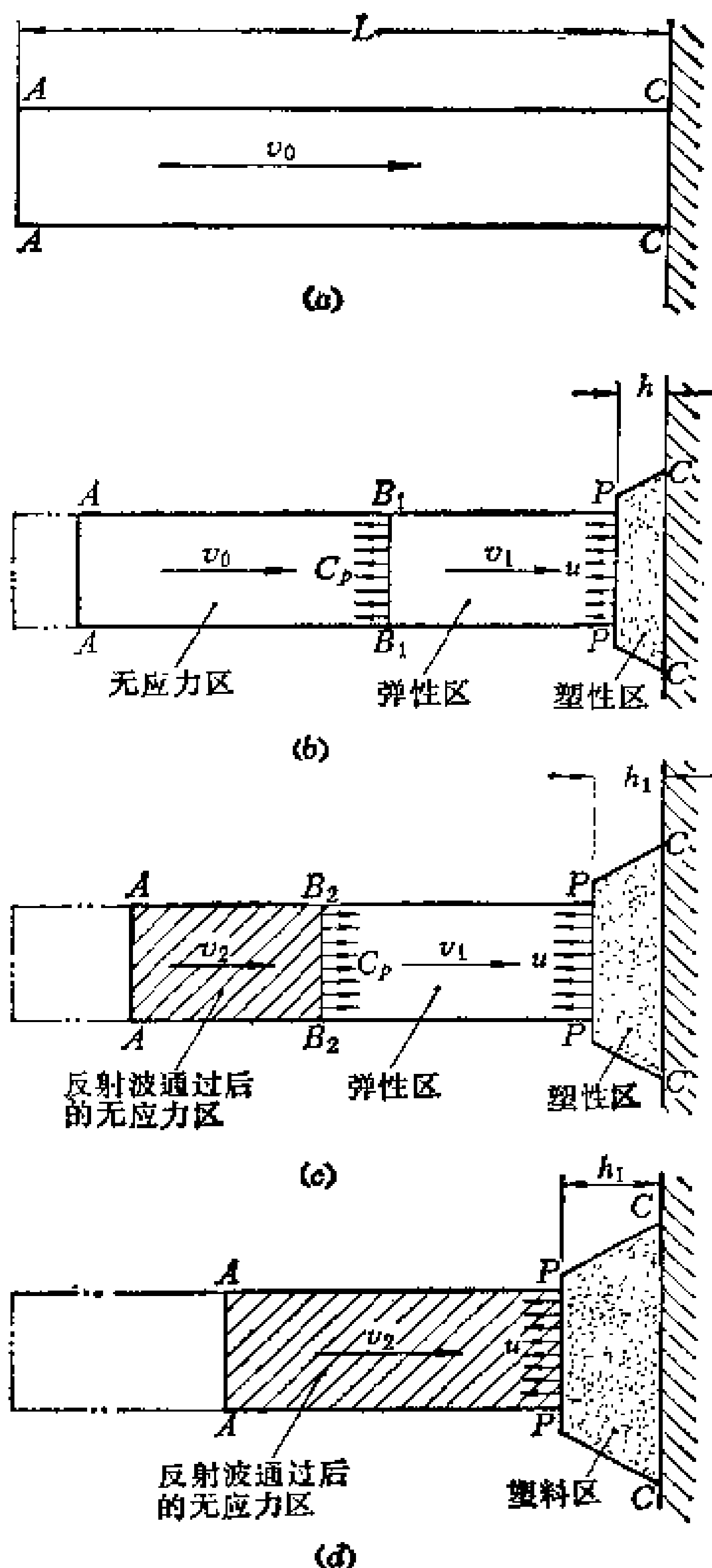
H. Lee and S. J. Tupper)[3-7]在 1954 年研究了硬化刚塑性的弹体和完全刚性的靶体相撞击的问题。到 1967 年，赖夫脱伯洛斯和台维兹 (D. Raftopoulos and N. Davids)[3-8]研究弹性和向下凹曲的应力应变律的塑性的弹体与完全刚性的靶体的撞击问题。在所有这些工作中，仍以泰勒的工作最根本和最有历史重要性，本节将详细地介绍泰勒的理论。

这里必须指出，泰勒理论原来是数值解的结果，钱伟长在 1982 年提供了全部分析解[3-9]，并对冲击计算进行了修正。修正理论的分析解指出，其结果比泰勒理论的解更加符合实际[3-10]。让我们分别介绍泰勒理论和钱伟长提供的分析解。

泰勒理论的基本假定是单轴向的、不可压缩的、和略去了侧向运动的惯性。柱形弹体中，凡是塑性波前尚未到达的部份，是以速度 v_c 作为一个刚性柱体向前运动的。泰勒理论证明，它和惠芬 (A. C. Whiffin)[3-10]在 1948 年的实验所得的末端弹道的弹体外形吻合很好，从而可以利用这些变形来计算材料的动力屈服强度。通过这些实验，我们明确看到，动力屈服强度和撞击速度无关，动力屈服强度高于静力屈服强度，对某些材料而言，可以超出好几倍。这样就为弹塑性撞击研究提供了一个重要的根据。

当柱形弹体一端（是平头的）垂直撞击平整的刚性靶体时，弹体接触端的压应力迅速增长，立刻达到弹性极限，同时有一个弹性压缩波以声速 $c_P=\sqrt{E_P/\rho_P}$ 向弹体尾部自由端传播。这个弹性压缩波的应力强度等于弹性压缩极限强度 σ_{YC}^D。就在这个弹性波离开撞击面后，撞击面上的应力继续增长而进入塑性范围。设材料是理想塑性材料，则塑性区内的应力也应该是 σ_{YC}^D。在继续压缩时，塑性区也向自由端延伸，其延伸速度等于弹塑性区交界面向左方传播的速度 u。这个速度一般比声波 c_P 小得很多，而且和撞击速度有关。

现在设弹性压缩波业已到达图 3-5 b 中 B_1B_1 截面处。我们从第一章 (1.3)、(1.6) 式可以看到，在弹性区 B_1P 中，弹体



(a)撞击前（$t=0$），弹体各点的运动速度为v_0；

(b)撞击后（$t\leqslant L/c_P$），B_1B_1为弹性波，波速c_P(向左)；PP为弹塑性界面，传播速度为u（待定）；AB_1为无应力区，运动速度为v_0；B_1P为弹性区运动速度$v_1=v_0-\dfrac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P}$；$PC$为塑性区，运动速度为零；

(c)撞击波反射后$\left(L/c_P<t<\dfrac{2L-h_1}{c_P}\right)$，$B_2B_2$为反射后弹性波，波速为$c_P$(向右)；$PP$为弹塑性界面，传播速度为$u$（待定）；$AB_2$为反射波通过后的无应力区，运动速度$v_2=v_0-\dfrac{2\sigma_{YC}^D}{c_P\rho_P}$；$B_2P$为弹性区，运动速度$v_1=v_0-\dfrac{\sigma_{YC}^D}{c_P\rho_P}$；$PC$为塑性区，运动速度为零；

(d)反射波遇见弹塑性交界面，第二次撞击开始，$t=\dfrac{2L-h_1}{c_P}$，AP为无应力区（通过二次弹性波），运动速度$v_2=v_0-\dfrac{2\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P}$，$PC$为塑性区，运动速度为零。

图3-5　柱形弹体撞击刚性靶体后弹性波和弹塑性界面的传播（弹性波第一次往返过程）

各点的运动速度应该是 v_1，它等于

$$v_1 = v_0 - \frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p} \tag{3.9}$$

而在声波波面的前方，是无应力区。它还没有感觉到在接触面上有了撞击，所以这个区域的材料仍以原速度 v_0 向靶体运动。当时间 $t = L/c_p$ 时，弹性波到达自由端，从那里得到反射。弹性拉伸波以相同的声波速度返回头来向接触端传送（图 3-5 c），这时这个柱形弹体分为三部份：第一部份中不仅通过了第一次弹性压缩波，而且还通过了反射的弹性拉伸波。这个区域的材料重又处于无应力状态，其运动速度通过反射而进一步减少为

$$v_2 = v_1 - \frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p} = v_0 - \frac{2\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p} \tag{3.10}$$

第二部份是只通过第一次弹性波的弹性区，其材料的运动速度仍是 v_1。第三部份是不再运动的塑性区。一直到反射弹性波的波前回到弹塑性交界面（图 3-5 d）时，这一阶段才完全结束。这时全弹体除了不再有纵向运动的塑性区外，都是通过了第一次弹性波及其反射波的区域，其运动速度都是 v_2。这时塑性区域业已扩大了些，柱形弹体的弹性部份比原来的长度减短了些，正以 v_2 的速度进行一次对弹塑性交界面的新的撞击，这时 v_2 比 v_0 要小。这种新的撞击产生新弹性波及其反射波，弹塑性交界面也渐渐左移。在这样一次次新的撞击中，撞击速度也逐渐降低，即 v_0，v_2，$v_4 \cdots v_{2n}$，其中

$$v_{2n} = v_0 - \frac{2n\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p} \quad (n = 0，1，2，\cdots) \tag{3.11}$$

到一定 n 后，$v_{2n} \cong 0$，也即是说，撞击运动停止了。这时弹体有一部份仍是弹性的，没有发生塑性永久变形。其靠近靶体部份是塑性变形部份，由于材料的不可压缩性，长度缩短了，塑性部份的直径一定要增加。我们的问题是：在各个时期内，弹塑性交界面的向左扩展速度 u 是时间的什么函数？最后的弹性部份有多长？塑性变形有多大？

这是一个按弹性波往返传播而分成一系列逐渐降低强度的撞击过程，所以是一个不连续的分阶段进行的运动过程，其计算当然是很复杂的。泰勒看到弹性波速度 c_p 比塑性区的扩张速度 u 高得很多。弹性波往返一次所需时间很短，在这样一段短时间内，u 的变化很小，可以略去其变化；v 的变化也很小，也可以略去其变化。这样，我们就可以把这个分阶段进行的过程，近似地看作为一种连续过程（图 3-6）。

设 h 为弹塑性界面和靶面的距离；x 为尚未压缩成塑性的弹性区长度；u 为弹塑性界面向左传播的速度；v 为无应力区向前运动的速度。它们都是时间的函数。

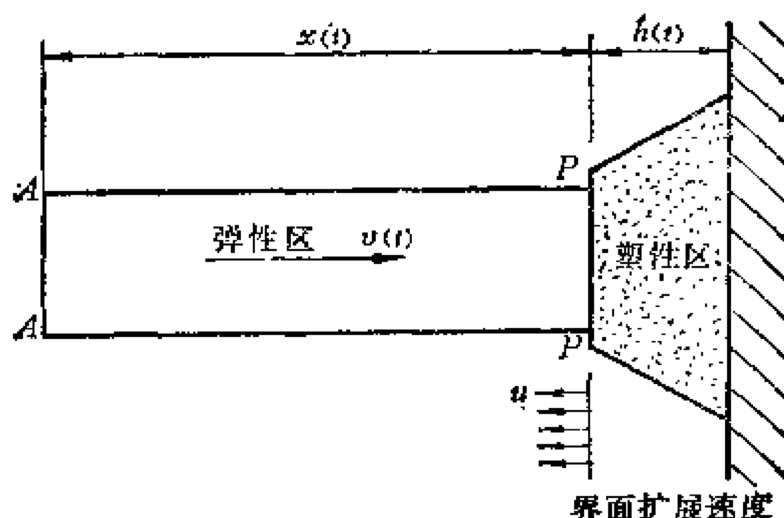


图3-6 泰勒应用的撞击运动连续模型

称弹性波在 AP 间往返一次所需时间为 Δt，则

$$\Delta t=\frac{2x}{c_p} \qquad (3.12)$$

在这段时间内

$$\Delta h=u\Delta t \qquad (3.13\text{a})$$

$$\Delta x=-(v+u)\Delta t \qquad (3.13\text{b})$$

$$\Delta v=-\frac{2\sigma_{YC}^{D}}{\rho_p c_p}=\text{弹性波往返一次弹性区的速度减小量} \qquad (3.13\text{c})$$

消去c_P，(3.12)，(3.13 a 、b 、c）给出

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=u \tag{3.14 a}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=-(u+v) \tag{3.14 b}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{\sigma_{YC}^{D}}{x\rho_P} \tag{3.14 c}$$

如果把Δt的时间间隔看得很小，把往返一次的过程化为连续的过程，在数学上相当于取$\Delta x\to 0$的极限。根据导数的定义，从(3.14）各式，求得

$$\frac{dh}{dt}=u \tag{3.15 a}$$

$$\frac{dx}{dt}=-(u+v) \tag{3.15 b}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\sigma_{YC}^{D}}{x\rho_P} \tag{3.15 c}$$

这里必须指出，如果我们把弹体的AP部份当作是刚性的，我们一样能导出（3.15）诸式。

(3.15）诸式中一共有$h(t)$，$u(t)$，$v(t)$，$x(t)$等四个待定量，所以（3.15）式中三个关系不足以求解本题，为了求解本题，必须补充动力分析关系和变形连续关系。

首先让我们假设材料是不可压缩的。在dt的时间中，有一段截面为A_0和长度为$(u+v)dt$的弹性区材料压入了塑性区域，变成了截面为A和长度为udt的塑性区材料，但体积不变（图 3-7)。

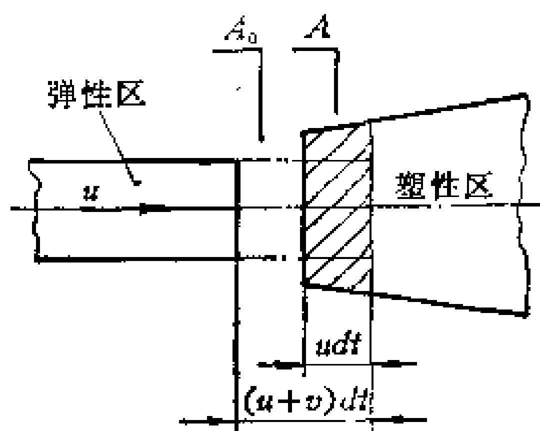


图3-7　弹塑性界面的运动和连续方程

于是，得连续方程为

$$A_0(u+v)=Au \tag{3.16}$$

现在让我们考虑在 dt 时间内的动量冲量的守恒定理。在 dt 内，有 $\rho_p A_0(u+v)dt$ 的材料以速度 v 进入塑性区域，它的动量为 $\rho_p A_0(u+v)v\,dt$。这些动量转化为塑性区域中压缩应力 σ_{YC}^D 的合力的增加部份在 dt 中的冲量。在 PP 截面上原有的压缩应力的合力为 $\sigma_{YC}^D A_0$，在 dt 以后，PP 截面上的合力为 $\sigma_{YC}^D A$。所以，压缩应力的合力的增加部份为 $\sigma_{YC}^D(A-A_0)$，它在 dt 中的冲量为 $\sigma_{YC}^D(A-A_0)dt$。所以，我们有动量冲量守恒方程

$$\rho_p A_0(u+v)v=\sigma_{YC}^D(A-A_0) \tag{3.17}$$

(3.15 a、b、c)、(3.16)、(3.17) 五个方程中共有五个待定量 $u(t)$、$v(t)$、$x(t)$、$h(t)$、$A(t)$。在一定的起始条件下是可以求解的。起始条件为

当 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=L$，$h=0$，$A=A_1$ (3.18)

这里 A_1 是待定的。其终止条件为

当 $t=t_2$ 时，

$$v=0,\quad x=L_2,\quad u=0,\quad h=h_2,\quad A=A_0 \tag{3.19}$$

其中 t_2，h_2，L_2 也都是待定的。

以上都是泰勒理论的成果，他是用数值积分法进行积分的。下文给出它的分析解[8-9]。

从 (3.16) 式，我们有

$$u=\frac{A_0}{A-A_0}v \tag{3.20}$$

把 (3.20) 代入 (3.17)，消去 v，即得 v 和 A 的关系

$$\frac{\rho_p v^2}{\sigma_{YC}^D}=\frac{(A-A_0)^2}{AA_0}=\frac{A}{A_0}+\frac{A_0}{A}-2 \tag{3.21}$$

引入起始条件，当 $v=v_0$ 时，$A=A_1$，于是 (3.21) 可以写成

$$\frac{\rho_p v_0^2}{\sigma_{YC}^D}=\frac{A_1}{A_0}+\frac{A_0}{A_1}-2 \tag{3.22}$$

解出 $\frac{A_1}{A_0}$，得

$$\frac{A_1}{A_0}=\lambda+1+\sqrt{\lambda^2+2\lambda} \tag{3.23}$$

其中

$$\lambda=\frac{\rho_P v_0^2}{\sigma_{YC}^D} \tag{3.24}$$

这是一个已知的无量纲量。(3.23) 式的开方号前只取正号，这是为了保证 $A_1/A_0>0$ 。(3.23) 式就给出了待定常数 A_1。

从 (3.15 b) 和 (3.15 c) 中消去 dt，得

$$\frac{dx}{dv}=-\frac{A}{A-A_0}vx\frac{\rho_P}{\sigma_{YC}^D} \tag{3.25}$$

再从 (3.21)、(3.25) 式中消去 $\rho_P v^2/\sigma_{YC}^D$，即得求 x 和 A 的关系的微分方程

$$2\frac{dx}{x}=-\frac{A}{A-A_0}d\left[\frac{(A-A_0)^2}{A_0 A}\right]=\left(\frac{1}{A_0}+\frac{1}{A}\right)dA \tag{3.26}$$

积分得

$$\ln x^2=\frac{A}{A_0}+\ln\frac{A}{A_0}+C_1 \tag{3.27}$$

式中 C_1 为常数。利用下列起始条件和终止条件：

起始条件： $x=L$， $A=A_1$ (3.28 a)

终止条件： $x=L_2$， $A=A_0$ (3.28 b)

我们分别求得

$$\ln L^2=\frac{A_1}{A_0}+\ln\frac{A_1}{A_0}+C_1 \tag{3.29 a}$$

$$\ln L_2^2=1+C_1 \tag{3.29 b}$$

从 (3.27)、(3.29 a 、 b) 中消去 C_1，分别有

$$\ln\left(\frac{x}{L}\right)^2=\frac{A-A_1}{A_0}+\ln\frac{A}{A_1} \tag{3.30 a}$$

$$\ln\left(\frac{L_2}{L}\right)^2=1-\frac{A_1}{A_0}-\ln\frac{A_1}{A_0} \tag{3.30 b}$$

把 (3.23) 式中的 A_1/A_0 的解，代入 (3.30 b) 式，即求得了待定的最终的未变形部份的弹体长度 L_2

$$\ln\left(\frac{L_2}{L}\right)^2 = 1 - \left[\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + \lambda}\right]$$

$$- \ln\left[\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + \lambda}\right] \tag{3.31}$$

其中λ是已知量，见（3.24）式。同样（3.30 a）式也可以写成

$$\ln\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{A}{A_0} + \ln\frac{A}{A_0} - \left[\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + \lambda}\right]$$

$$- \ln\left[\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + \lambda}\right] \tag{3.32}$$

这是 x/L 和 A/A_0 的关系式。

现在让我们求弹体在变形后的整体形状尺寸。从（3.15 a，b）中消去 dt，得

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{u}{u+v} = -\frac{A_0}{A} \tag{3.33}$$

积分后得

$$h = -\int_L^x \frac{A_0}{A}\,dx \tag{3.34}$$

从（3.32）式，微分给出

$$dx = \frac{1}{2}L\left(1 + \frac{A_0}{A}\right)\sqrt{\frac{A}{A_0}}\,e^{\frac{A}{2A_0}}\,e^{-\frac{1}{2}R}\,d\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{3.35 a}$$

$$R = 1 + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \lambda} + \ln\left[1 + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \lambda}\right] \tag{3.35 b}$$

把（3.35）代入（3.34），得

$$h = \frac{1}{2}Le^{-\frac{1}{2}R}\int_{A/A_0}^{A_1/A_0}(\xi^{-\frac{1}{2}} + \xi^{-3/2})e^{\frac{1}{2}\xi}d\xi \tag{3.36}$$

引入

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \int_1^\xi \xi^{-(1-\alpha)}e^{\alpha\xi}d\xi \tag{3.37}$$

当 $\alpha = 1/2$ 时

$$\Gamma_{1/2}(\xi)=\int_{1}^{\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\xi}d\xi \tag{3.37a}$$

(3.36)式可以写成

$$h=Le^{-\frac{1}{2}R}\left\{\Gamma\left(\frac{A_1}{A_0}\right)-\Gamma\left(\frac{A}{A_0}\right)+\left(\frac{A}{A_0}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\frac{A}{A_0}}-\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0}}\right\} \tag{3.38}$$

在终止时，$A=A_0$，$h=h_2$，所以

$$h_2=Le^{-\frac{1}{2}R}\left\{\Gamma\left(\frac{A_1}{A_0}\right)+e^{1/2}-\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{-1/2}e^{\frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0}}\right\} \tag{3.39}$$

(3.38)、(3.39) 两式相减，得

$$h=h_2-Le^{-\frac{1}{2}R}\left\{\Gamma\left(\frac{A}{A_0}\right)+e^{1/2}-\left(\frac{A}{A_0}\right)^{-1/2}e^{\frac{1}{2}\frac{A}{A_0}}\right\} \tag{3.40}$$

(3.40) 式为柱形弹体撞击后的形状尺寸表示式。因为A_1/A_0是根据 (3.23) 式由λ值决定的，所以塑性区的最大长度h_2也是由λ决定的。Γ(ξ)可以用数值积分决定，见表 3-1。

表3-1　$\Gamma(\xi)=\int_{1}^{\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\xi}d\xi$

ξ	Γ(ξ)	ΔΓ	ξ	Γ(ξ)	ΔΓ	ξ	Γ(ξ)	ΔΓ
1.0	0	0.16500	2.0	1.74709	0.39452	4.0	7.06790	0.76748
1.1	0.16500	0.16575	2.2	2.14161	0.41661	4.2	7.83538	0.83375
1.2	0.33075	0.16712	2.4	2.55822	0.44162	4.4	8.66913	0.89478
1.3	0.49787	0.16906	2.6	2.99984	0.46964	4.6	9.56391	0.96747
1.4	0.66693	0.17149	2.8	3.46948	0.50082	4.8	10.53138	1.04732
1.5	0.83842	0.17436	3.0	3.97030	0.53533	5.0	11.57870	1.13466
1.6	1.01278	0.17766	3.2	4.50563	0.57343	5.2	12.71336	1.27441
1.7	1.19044	0.18136	3.4	5.07906	0.61537	5.4	13.98777	1.33442
1.8	1.37180	0.18542	3.6	5.69443	0.66115	5.6	15.32219	1.44866
1.9	1.55722	0.18987	3.8	6.35588	0.71202	5.8	16.77085	
2.0	1.74709		4.0	7.06790		6.0		

现在让我们求 t 和A/A_0的关系。从（3.15c）和（3.25）两式消去dv，得dt和dx的关系式：

$$dt=-\frac{A-A_0}{Av}dx \tag{3.41}$$

把（3.35 a）和（3.21）式中的dx和v表达式代入上式，整理后得

$$dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_P}{\sigma_{YC}^D}\right)^{1/2}\left(1+\frac{A_0}{A}\right)e^{-\frac{1}{2}R}e^{\frac{1}{2}\frac{A}{A_0}}d\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{3.42}$$

积分，并利用初始条件$A=A_1$，于是我们求得了 t 和A/A_0的关系式：

$$t=\frac{L}{\sqrt{2}v_0}\lambda^{1/2}e^{-\frac{1}{2}R}\left\{\Lambda\left(\frac{A_1}{A_0}\right)-\Lambda\left(\frac{A}{A_0}\right)\right\} \tag{3.43}$$

其中$\Lambda(\xi)$如下式

$$\Lambda(\xi)=\int_1^{\xi}\left(1+\frac{1}{\tau}\right)e^{\frac{1}{2}\tau}d\tau \tag{3.44}$$

表 3-2 为$\Lambda(\xi)$的数值表。

表3-2　$\Lambda(\xi)=\int_1^{\xi}\left(1+\frac{1}{\tau}\right)e^{\frac{1}{2}\tau}d\tau$的数值表

ξ	$\Lambda(\xi)$	$\Delta\Lambda$	ξ	$\Lambda(\xi)$	$\Delta\Lambda$	ξ	$\Lambda(\xi)$	$\Delta\Lambda$
1.0	0	0.33013	2.0	3.58001	0.84403	4.0	15.98067	1.93322
1.1	0.33613	0.33233	2.2	4.42404	0.90661	4.2	17.91391	2.11707
1.2	0.66246	0.33635	2.4	5.33065	0.97768	4.4	20.03098	2.32010
1.3	0.99881	0.34194	2.6	6.30833	1.05762	4.6	22 35108	2.54428
1.4	1.34075	0.34891	2.8	7.36595	1.14705	4.8	24.89536	2.79173
1.5	1.68966	0.35715	3.0	8.51300	1.24672	5.0	27.68708	3.06484
1.6	2.04681	0.36652	3.2	8.75972	1.35748	5.2	30.75193	3.36622
1.7	2.41333	0.37701	3.4	11.11720	1 48030	5.4	34.11815	3.66545
1.8	2.79034	0.38855	3.6	12.59750	1.61634	5.6	37.78360	
1.9	3.17889	0.40112	3.8	14.21384	1 76685	5.8		
2.0	3.68001		4.0	15.98067		6.0		

当 $t=t_2$（即变形终止时），$A=A_0$，而$\Lambda(1)=0$。所以从（3.43），有

$$t_2=\frac{L}{\sqrt{2}\,v_0}\lambda^{1/2}e^{-\frac{1}{2}R}\Lambda\left(\frac{A_1}{A_0}\right) \tag{3.45}$$

最后，从（3.20）、（3.21），我们可以用 A/A_0 来表示 u 和 v，即

$$u=v_0\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\sqrt{\frac{A_0}{A}} \tag{3.46a}$$

$$v=v_0\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\sqrt{\frac{A_0}{A}}\left(\frac{A}{A_0}-1\right) \tag{3.46b}$$

从上面所得结果，我们已把 u，v，t，h，x 化为 A/A_0 的表达式。它们是(3.46a)、(3.46b)、(3.43)、(3.38)和（3.32）。其中 λ、R 和 A_1/A_0 见（3.24）、（3.35b）和（3.23），它们都是已知的。

从上面的计算，还可以求得终端条件，t_2、L_2、h_2。它们分别用（3.45）、（3.31）、（3.39）来表示。上面所给的解，是以 A/A_0 为参数的参数解。

我们根据这些结果计算了撞击后的弹体变形和撞击速度的关系，即 h_2/L、$(L_2+h_2)/L$、L_2/L 和 $\lambda=\rho_P v_0^2/(2\sigma_{YC}^D)$ 的关系，也计算了弹体的撞击延续时间和撞击速度的关系，即 $(t_2v_0)/L$ 和 $\lambda=\rho_P v_0^2/(2\sigma_{YC}^D)$ 的关系，见表 3-3 和图 3-8。其中实验点是惠芬[3-10]（A. C. Whiffin）和泰勒[3-6]的工作中取来的。h_2/L 的曲线和实验点有一定差距，这说明在泰勒理论中，忽视了塑性材料的横向动运的惯性作用的影响，忽视了靶体在撞击中变形的动量

表3-3 $\frac{h_2}{L}$，$\frac{L_2}{L}$，$\frac{h_2+L_2}{L}$，$\frac{t_2v_0}{L}$ 和 $\lambda=\frac{\rho_P v_0^2}{2\sigma_{YC}^D}$ 的关系

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
h_2/L	0	0.2890	0.3688	0.3992	0.4012	0.4010	0.3552	0.2965	0.2469
L_2/L	1	0.6060	0.4758	0.3892	0.3252	0.2752	0.1321	0.0686	0.0370
$(h_2+L_2)/L$	1	0.8950	0.8446	0.7884	0.7264	0.6762	0.4873	0.3651	0.2839
t_2v_0/L	0	0.1559	0.2771	0.3778	0.4621	0.5322	0.8344	0.8934	0.9516

和能量消耗，也忽视了弹体塑性强化过程。这些是泰勒理论的h_2/L理论值和实验相差较多的主要原因。但是，除了上述诸因素外，泰勒理论有一点是显然可以改进的，即关于（3.17）式和它的修正问题，这将在下节讨论。

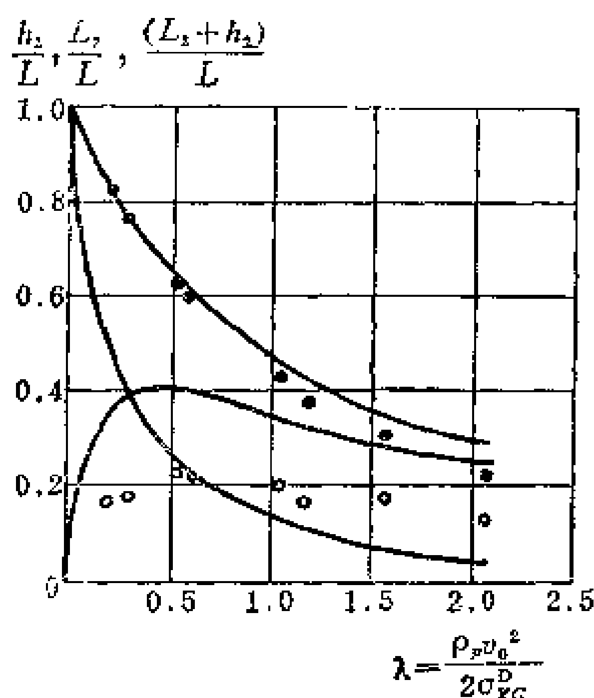


图3-8 $\frac{L_2}{L}$、$\frac{h_2}{L}$、$\frac{h_2+L_2}{L}$和λ的关系曲线

●—$\frac{h_2+L_2}{L}$的实验点；○—$\frac{h_2}{L}$的实验点。

我们也计算了在各种撞击速度下〔即各种$\lambda=\rho_p v_0^2/(2\sigma_{YC}^D)$值〕的塑性区域$h/L$的发展过程，即$h/L$和$tv_0/L$的关系曲线，其结果见表3-4和图3-9。我们也很易看到，h/L和tv_0/L的关系对于一切撞击速度而言是很接近于线性的，也即是说，dh/dt几乎是个常数。我们在下面，将利用这个结果提出一个简化理论，得到了通过对塑性变形尺寸

表3-4 h/L和tv_0/L的理论计算值

$\frac{A}{A_0}$	λ = 0.5		λ = 1.0		λ = 1.5		λ = 2.0	
	$\frac{tv_0}{L}$	$\frac{h}{L}$	$\frac{tv_0}{L}$	$\frac{h}{L}$	$\frac{tv_0}{L}$	$\frac{h}{L}$	$\frac{tv_0}{L}$	$\frac{h}{L}$
1	0.5322	0.4010	0.8344	0.3532	0.8934	0.2965	0.9516	0.2468
1.5	0.3918	0.2744	0.7387	0.2944	0.8327	0.2650	0.9137	0.2298
2	0.2347	0.1549	0.6316	0.2371	0.7611	0.2352	0.8712	0.2137
2.5	0.0486	0.0304	0.5013	0.1774	0.6836	0.2011	0.8208	0.1970
3			0.3523	0.0906	0.5266	0.1590	0.7604	0.1788
3.5			0.1628	0.0330	0.4660	0.1317	0.6852	0.1579
4					0.3174	0.0875	0.5925	0.1340
4.5					0.1295	0.0346	0.4755	0.1054
5							0.3295	0.0721
5.5							0.1438	0.0304
2.6180	0	0						
3.7321			0	0				
4.7913					0	0		
5.8284							0	0

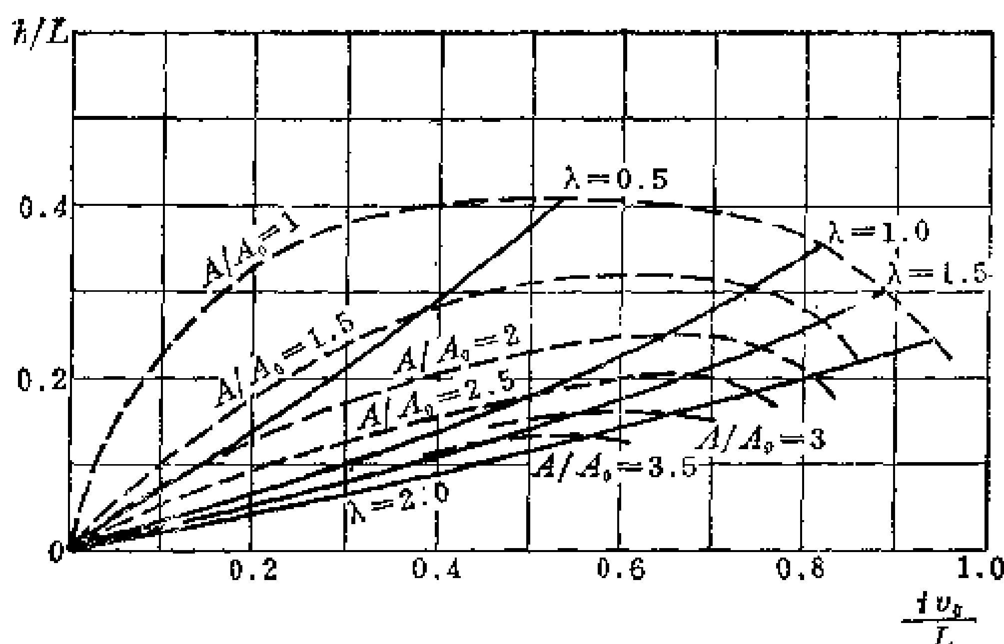


图3-9　时间 t 和塑性区长度 h 的关系曲线

—— $\lambda=\frac{\rho_P v_0^2}{2\sigma_{YC}^D}$ 为常数的曲线；　---- $\frac{A}{A_0}$ 为常数的曲线。

的测量而反过来计算动力屈服强度的有名的泰勒公式。

从（3.15b）和（3.15c）中消去dt，得

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P x(u+v)} \tag{3.47}$$

根据图 3-9 的 λ＝常数的曲线和直线非常接近这一事实，我们可以假说$\frac{dh}{dt}=u=C$常数。于是（3.47）可以写成

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P x(C+v)} \tag{3.48}$$

或重写为

$$(C+v)dv=\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P}\frac{dx}{x} \tag{3.48a}$$

积分。并用起始条件 $t=0$、$v=v_0$、$x=L$ 决定积分常数，经整理后可以写成

$$\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P}\ln\frac{x}{L}=\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v_0^2+Cv-Cv_0 \tag{3.49}$$

现在再用终止时的条件：$t=t_2$时，$v=0$，$x=L_2$。从（3.49），求得

$$\frac{1}{2}v_0^2+Cv_0=\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p}\ln\frac{L}{L_2} \tag{3.50}$$

但是C是假设的塑性区的扩张速度，塑性区的最后长度为h_2，整个过程所需时间为t_2，于是有

$$t_2=\frac{h_2}{C} \tag{3.51}$$

而弹体的尾端（即自由端），在同一时间t_2中，开始时的速度为v_0，终结时（$t=t_2$时）的速度为零，一共移动了（$L-L_2-h_2$）这样一段距离。如果是一个等减速运动，则平均速度为$\frac{1}{2}v_0$。所需时间为

$$t_2=\frac{L-L_2-h_2}{\frac{1}{2}v_0} \tag{3.52}$$

从（3.51），（3.52）中消去t_2，解出C

$$C=\frac{h_2v_0}{2(L-L_2-h_2)} \tag{3.53}$$

把这个近似估算的C值代入（3.50）式。整理后即得有名的泰勒公式：

$$\frac{2\sigma_{YC}^D}{\rho_p v_0^2}=\frac{L-L_2}{(L-L_2-h_2)\ln(L/L_2)} \tag{3.54}$$

所有式右的量都可以通过实验所得的变形弹体上测得的，而且都是几何量，它和撞击速度无关。

惠芬[3-10]的实验充分证实了这一点。他用各种尺寸的低碳钢柱形弹体，以各种撞击速度撞击硬度很大的靶体，然后根据其变形尺寸按（3.54）计算其动力压缩屈服强度σ_{YC}^D，证明它确为一常数（平均值为50吨/英寸²），其结果见图3-10。

同时，惠芬还在同一试验中，使用了36种低碳钢，各种合金钢，各种弹体和装甲用的钢材进行试验，证明了钢的动力压缩屈

服强度和静力压缩屈服强度（0.2%残余变形的应力）σ^S_{YC}之间满足下述公式：

$$\frac{\sigma^D_{YC}}{\sigma^S_{YC}}=5.98-2.42\lg\sigma^S_{YC} \tag{3.55}$$

其中 σ^D_{YC}，σ^S_{YC} 的单位为吨/英寸²。

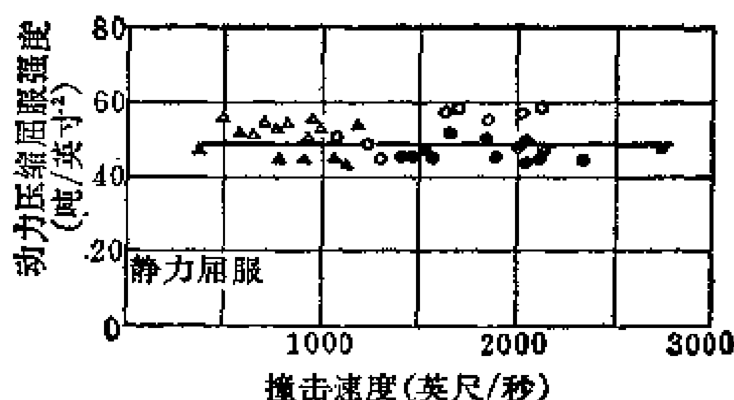


图3-10　不同尺寸的低碳钢弹体的动力压缩屈服强度与撞击速度的关系

●—直径（0.280英寸），长（1.0000英寸）；○—直径（0.5000英寸），长（1.0000英寸）；▲—直径（0.120 英寸），长（4.000英寸）；△—直径（0.350英寸）。

同样，对于铝合金而言，是

$$\frac{\sigma^D_{YC}}{\sigma^S_{YC}}=4.09-1.89\ \lg\sigma^S_{YC} \tag{3.56}$$

详细的数据见图3-11。

在以后的研究中，有人指出（3.48）式中的C实际上是塑性波的传播速度。对于象钢这样的材料而言，在塑性阶段$\left(\frac{d\sigma}{d\epsilon}\right)_p$是一个常数。所以（3.48）中的$C$应该是

$$C=c_p=\sqrt{\frac{1}{\rho_p}\left(\frac{d\sigma}{d\epsilon}\right)_p}=\text{弹体中的塑性波速} \tag{3.57}$$

于是（3.50）式可以写成

$$\frac{L_2}{L}=e^{-\frac{\rho_p v_0^2}{2\sigma^D_{YC}}\left(1+\frac{2c_p}{v_0}\right)} \tag{3.58}$$

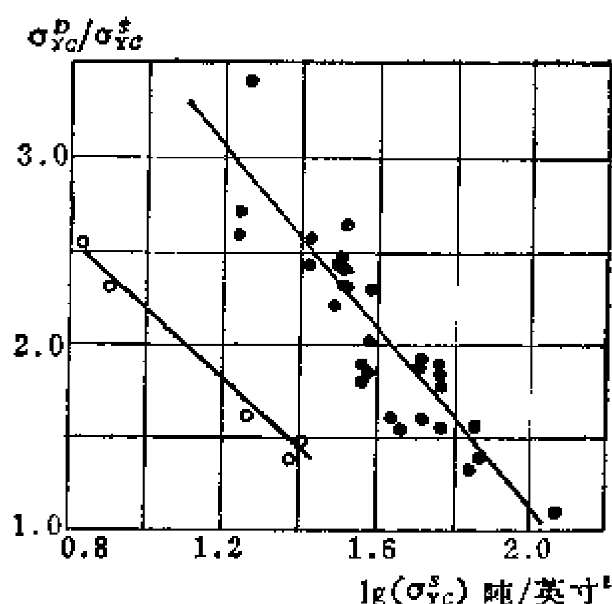


图3-11　钢和铝合金的动力压缩屈服强度σ_{YC}^{D}和静力压缩屈服强度σ_{YC}^{S}的关系

●—各种钢；○—各种铝合金。

其中L为柱形弹体原长，L_2为柱形弹体在最后保存的未变形部分(即弹性区)的长度。

§3.7　泰勒理论的修正

钱伟长[3-9]在1982年提出，泰勒理论的动量冲量守恒方程(3.17)式不尽合理，可以修正如下：

现在让我们研究图3-7中截面从A_0增加到A的过程中的冲量计算。这个过程需要的总时间是δt，所以，压缩应力的合力的增加部分在δt中的冲击量决不可能象（3.17）式的建立过程时所设想的那样，等于δt乘$\sigma_{YC}^{D}(A-A_0)$，而是小于这个量，这个扩展过程的具体细节我们并不知道，但我们可以近似地假设接触面积S是一个等减速的扩张过程。δt的一段时间开始时，面积扩张速度为w_0。结束时为零。于是在其它时刻t，扩张速度dS/dt为

$$\frac{dS}{dt}=w_0\left(1-\frac{t}{\delta t}\right),\quad 0\leqslant t\leqslant\delta t \tag{3.59}$$

积分后得

$$S=\int_0^t \frac{dS}{dt}dt=w_0\left(t-\frac{t^2}{2\delta t}\right)+C' \tag{3.60}$$

w_0，C'都是待定的。它们由起始条件（$t=0$，$S=A_0$），和结束条件（$t=\delta t$，$S=A$）求得，即

$$A_0=C' \tag{3.61a}$$

$$A=\frac{1}{2}w_0\delta t+C' \tag{3.61b}$$

解出后得

$$C'=A_0,\quad w_0=\frac{2(A-A_0)}{\delta t} \tag{3.62}$$

代入（3.60），得δt时段中各个时刻t时的接触面积为

$$S=(A-A_0)\left(2t-\frac{t^2}{\delta t}\right)\frac{1}{\delta t}+A_0 \tag{3.63}$$

所以，压缩应力σ_{YC}^D的合力增加部分在δt中的冲量I应该是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\delta t}\sigma_{YC}^D(S-A_0)dt\\&=\sigma_{YC}^D(A-A_0)\int_0^{\delta t}\left(2t-\frac{t^2}{\delta t}\right)\frac{dt}{\delta t}\end{aligned} \tag{3.64}$$

积分后得

$$I=\frac{2}{3}\sigma_{YC}^D(A-A_0)\delta t \tag{3.65}$$

和泰勒所得的冲量相比，这个冲量只有它的2/3。于是动量冲量守恒定律（3.17）式应该写成

$$\rho_P A_0(u+v)v=\frac{2}{3}\sigma_{YC}^D(A-A_0) \tag{3.66}$$

从（3.16）和（3.66）中消去u，得

$$\frac{\rho_P v^2}{\sigma_{YC}^D}=\frac{2}{3}\frac{(A-A_0)^2}{AA_0} \tag{3.67}$$

当$v=v_0$时，$A=A_1$，我们有

$$\lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{A_1}{A_0}+\frac{A_0}{A_1}-2\right) \tag{3.68}$$

其中 λ 见（3.24）式，从（3.68）式解A_1/A_0，得

$$\frac{A_1}{A_0}=1+\frac{3}{2}\lambda+\sqrt{3\lambda+\frac{9}{4}\lambda^2} \tag{3.69}$$

把它和（3.23）式相比，对相同的 λ 值而言，由（3.69）式所算得的A_1/A_0值大于从（3.23）式所算得的A_1/A_0值。通过（3.25）到（3.32）式相同的步骤，我们得

$$\ln\frac{x}{L}=\frac{1}{3}\left[\frac{A}{A_0}+\ln\frac{A}{A_0}-\frac{A_1}{A_0}-\ln\frac{A_1}{A_0}\right] \tag{3.70 a}$$

$$\ln\frac{L_2}{L}=-\frac{1}{3}\left[1-\frac{A_1}{A_0}-\ln\frac{A_1}{A_0}\right] \tag{3.70 b}$$

其中A_1/A_0是已知量，（3.70 a）是x/L和 A/A_0 的关系式。

用（3.33）到（3.40）式的相同步骤，我们可以求得

$$h=\frac{1}{3}Le^{-\frac{1}{3}R_1}\left[\Phi\left(\frac{A_1}{A_0}\right)-\Phi\left(\frac{A}{A_0}\right)\right] \tag{3.71}$$

其中

$$R_1=\frac{A_1}{A_0}+\ln\frac{A_1}{A_0} \tag{3.72}$$

$$\Phi(\xi)=\int_0^{\xi}\xi^{-6/3}(1+\xi)\,e^{\frac{1}{3}\xi}\,d\xi \tag{3.73}$$

当$A=A_0$时，$\Phi(1)=0$，$h=h_2$，所以有

$$h_2=\frac{1}{3}Le^{-\frac{1}{3}R_1}\Phi\left(\frac{A_1}{A_0}\right) \tag{3.74}$$

$$h=h_2-\frac{1}{3}Le^{-\frac{1}{3}R_1}\Phi\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{3.75}$$

$\Phi(\xi)$的积分可以用数值积分求得，其结果见表 3-4 。

表3-5　Φ(ξ) 和 T(ξ) 的数值表

ξ	Φ(ξ)	ΔΦ	T(ξ)	ΔT
1.0	0	0.268397	0	0.274966
1.1	0.268397	0.250047	0.274966	0.268061
1.2	0.518444	0.235416	0.543027	0.263136
1.3	0.753860	0.223589	0.806163	0.259734
1.4	0.977449	0.213930	1.065897	0.257569
1.5	1.191379	0.205981	1.323465	0.256408
1.6	1.397360	0.199405	1.579873	0.256111
1.7	1.596765	0.193946	1.835984	0.256550
1.8	1.790711	0.189756	2.092534	0.257632
1.9	1.980466	0.185690	2.350166	0.259284
2.0	2.166156	0.362725	2.609450	0.525532
2.2	2.528881	0.354642	3.134982	0.537765
2.4	2.883523	0.349875	3.672747	0.553146
2.6	3.233398	0.347752	4.225893	0.571377
2.8	3.581150	0.347813	4.797270	0.592279
3.0	3.928963	0.349729	5.389549	0.615749
3.2	4.278692	0.353270	6.005298	0.641741
3.4	4.631962	0.358267	6.647039	0.670261
3.6	4.990229	0.361266	7.317300	0.701329
3.8	5.351495	0.371478	8.018629	0.735021
4.0	5.722973	0.380964	8.753650	0.771414
4.2	6.103937	0.290901	9.525064	0.810612
4.4	6.894838	0.401973	10.335676	0.852743
4.6	6.896811	0.414177	11.188419	0.897966
4.8	7.310988	0.427515	12.086385	0.946380
5.0	7.738503	0.442395	13.032765	0.983555
5.2	8.180898	0.458055	14.016320	1.053661
5.4	8.638953	0.468803	15.069981	1.112907
5.6	9.107756	0.490278	16.182888	1.176186
5.8	9.598034	0.509667	17.359074	1.243741
6.0	10.107700	0.532743	18.602815	1.315836
6.2	10.640443	0.554861	19.918651	1.392752
6.4	11.195304	0.578434	21.311403	1.474791
6.6	11.773738	0.603533	22.786221	1.562278
6.8	12.377271	0.632632	24.348498	1.655558
7.0	13.009903	0.658612	26.004056	1.755004
7.2	13.668515	0.688760	27.759060	1.861012
7.4	14.357275	0.720773	29.620072	1.974006
7.6	15.078048	0.754749	31.594077	2.094439
7.8	15.832797	0.790800	33.688515	2.222794
8.0	16.623596		35.911308	

通过（3.41）到（3.43）式的相同步骤，我们可以求得 t 和 A/A_0的关系式为

$$t=\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}\,v_0}\,Le^{-\frac{1}{3}R_1}\left\{T\left(\frac{A_1}{A_0}\right)-T\left(\frac{A}{A_0}\right)\right\} \qquad (3.76)$$

其中R_1见（3.72）式，T(ξ)为

$$T(\xi)=\int_1^{\xi}\xi^{-7/6}(1+\xi)e^{\frac{1}{3}\xi}d\xi \tag{3.77}$$

$T(\xi)$的积分可以用数值积分求得，其结果也列于表 3-5 。

最后，从（3.16）式和（3.67）式，我们可以用 A/A_0 来表示 u 和 v，即

$$v=-\frac{1}{\sqrt{3\lambda}}v_0\sqrt{\frac{A_0}{A}}\left(\frac{A}{A_0}-1\right) \tag{3.78 a}$$

$$u=\frac{1}{\sqrt{3\lambda}}v_0\sqrt{\frac{A_0}{A}} \tag{3.78 b}$$

从上述结果，我们已把修正理论的 u、v、t、h 和 x 化为 A/A_0 的表达式，它们是(3.78 a)、(3.78 b)、(3.76)、(3.75) (3.70 a) 诸式，其中 λ、R_1、A_1/A_0 见 (3.24)、(3.72)、(3.69) 诸式，它们都是已知的。这也是以 A/A_0 为参数的参数解。根据(3.74)、(3.70 b) 和 (3.76) 式，我们可以计算 h_2/L，L_2/L，$(h_2+L_2)/L$，t_2v_0/L 和 λ 的关系，见表 3-6 和图 3-12 。

把图 3-8 和图 3-12 相较，不论 $(h_2+L_2)/L$ 或 h_2/L 曲线，都是修正理论更接近于实验值，但 h_2/L 还是偏高，这是因为理论中略去了其它因素而引起的。

表3-6　修正理论中 $\frac{h_2}{L}$，$\frac{L_2}{L}$，$\frac{L_2+h_2}{L}$，$\frac{t_2v_0}{L}$ 和 λ 的关系

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
h_2/L	0	0.2561	0.3060	0.3265	0.3335	0.3330	0.2920	0.2403	0.1958
L_2/L	1	0.6573	0.5331	0.4469	0.3809	0.3279	0.1676	0.0910	0.0509
$(h_2+L_2)/L$	1	0.9134	0.8391	0.7734	0.7144	0.1609	0.4596	0.3313	0.2467
t_2v_0/L	0	0.1618	0.2912	0.3999	0.4925	0.5720	0.8354	0.9297	1.0264

从图3-12中可以看到修正理论的 $(h_2+L_2)/L\sim\lambda$ 关系曲线和实验值吻合很好。因此，如果把修正理论的 $(h_2+L_2)/L\sim\lambda$ 关系列出表格，则从 $(h_2+L_2)/L$ 的实验值就可以用插值法求得 λ 值。

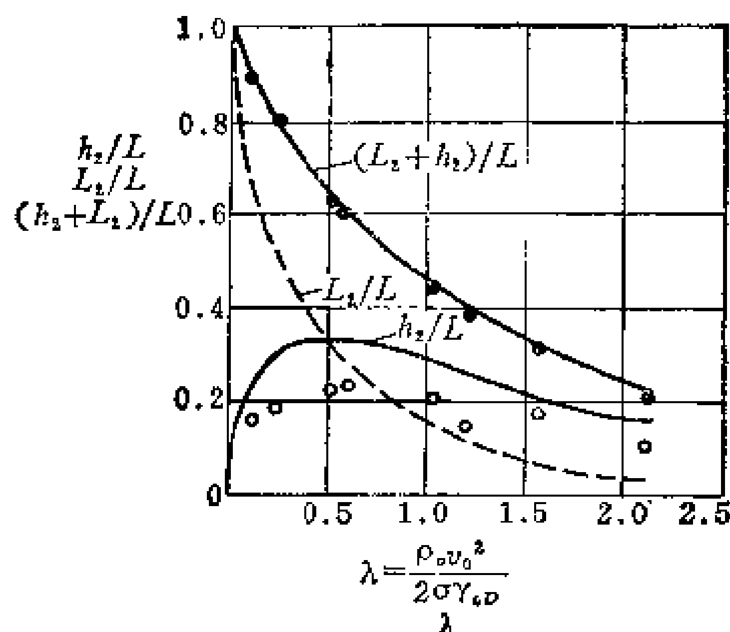


图3-12 修正理论的h_2/L，L_2/L，$(h_2+L_2)/L$和λ的关系曲线

●—$\frac{h_2+L_2}{L}$的实验值；　○—$\frac{h_2}{L}$的实验值。

从此，可以计算$\sigma_{YC}^{D}=\rho_P v_0^2/(2\lambda)$的实验值。

§3.8 刚塑性弹体和变形靶体撞击的里希脱理论(1977)[3-11, 3-13]

里希脱(R. F. Recht, 1977)[3-11]研究了刚塑性弹体和变形靶体撞击的理论。他所研究的靶体是有限厚的；不是理想刚性的，而是可以变形的。

他根据实际撞击速度v_L大于或小于弹体中的塑性波速c_P而分为两种不同的情况，用两种不同的靶体变形模式处理。

第一种模式适用于$c_P>v_L$，这时可以略去靶体中的波的传播，而认为靶体的接触面根据§1.4的理论顺着撞击速度运动，其运动速度v_I为

$$v_I=\frac{v_0}{1+\frac{\rho_t c_{tI}}{\rho_P c_P}},\quad (c_{tI}=\sqrt{K_t/\rho_t})\tag{3.79}$$

其中 v_L 为弹体相对于靶板的实际撞击速度。如图 3-13 我们的一切速度都是相对于开始时不动的靶面而言的。

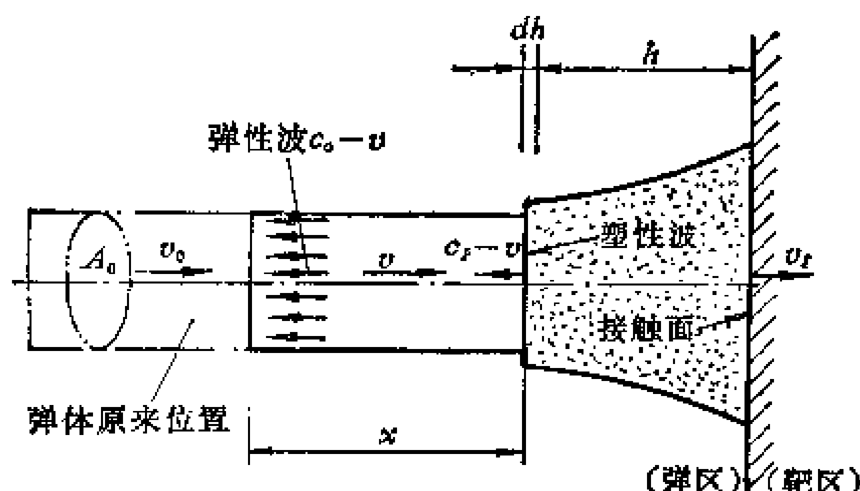


图3-13　弹体在撞击半无限变形靶体时的变形简图

在这种撞击中，弹体没有质量损失，即质量 m 为一常数（即为起始质量m_0）。设在 dt 时间中，塑性区增长dh，其实际增长速度为$c_p-(v-v_t)$。所以

$$dh=[c_p-(v-v_t)]dt=(c_p-v_L)dt \qquad (3.80)$$

其中v_L为塑性边界相对于运动靶体表面的速度

$$v_L=v-v_t \qquad (3.81)$$

设dh这一段材料，原来都是未变形的弹体中的材料。设这种变形是不可压缩的。所以质量守恒定理给出

$$c_pAdt=(c_p-v_L)A_0dt \qquad (3.82)$$

或可写成

$$\frac{A}{A_0}=\frac{1}{1-\frac{v_L}{c_p}} \qquad (3.83)$$

称 $x=L-c_pt$ 为尚未变形的弹体剩余长度，其中 L 为弹体原有长度。这一段的质量为 $m_E=\rho_pA_0x$，其减速度的有关外力仍是塑性区作用在弹体这一段上的动力压缩应力的合力，它是

$$F=-\sigma_{YC}^DA_0=m_E\frac{dv}{dt}=\rho_pA_0x\frac{dv}{dt} \qquad (3.84)$$

在利用了$x=L-c_pt$以后，上式可以化成

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p(L-c_pt)} \tag{3.85}$$

积分，并用起始条件$t=0$，$v=v_0$决定积分常数，其解可以写成

$$v=v_0+\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_pc_p}\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t\right) \tag{3.86}$$

根据$v_L=v-v_I$的定义，我们有

$$v_L=v_0+\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_pc_p}\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t\right)-v_I \tag{3.87}$$

把（3.79）代入，得

$$v_L=\frac{v_0}{Z^*}+\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_pc_p}\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t\right) \tag{3.88}$$

其中Z^*为阻抗匹配因子或简称阻抗因子（Impedance Matching Factor），

$$Z^*=1+\frac{\rho_pc_p}{\rho_tc_H} \tag{3.89}$$

这里应该提醒读者注意，这个因子和（3.79）式中分母是不一样的。对于刚性靶体而言，$c_H=\infty$，v_I为零，因此$Z^*=1$，这从本式也可以看出来。

现在让我们求在撞击结束时，剩下的一段未变形的弹体的长度L_2。先求撞击结束时的时间t_2。在撞击结束时，塑性区界面相对于靶面的速度$v_L=0$，把t_2和$v_L=0$代入（3.88）式，解出t_2，得

$$t_2=\frac{L}{c_p}\left\{1-e^{-\frac{\rho_pc_pv_0}{Z^*\sigma_{YC}^D}}\right\} \tag{3.90}$$

在$t=t_2$时，尚未变形的弹体长度为$x=L_2$，

$$L_2=L-c_pt_2=Le^{-\frac{\rho_pc_pv_0}{Z^*\sigma_{YC}^D}} \tag{3.91}$$

现在让我们计算变形部分的尺寸，即h和A/A_0的关系。先把（3.88）式代入（3.80）式，得

$$dh=\left\{c_p-\frac{v_0}{Z^*}-\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p}\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t\right)\right\}dt \tag{3.92}$$

积分后，并利用起始条件（$h=0$，$t=0$）决定积分常数，其结果可以写成

$$h=c_p\left(1-\frac{v_0}{Z^*c_p}+Q\right)t+LQ\left(1-\frac{c_p}{L}t\right)\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t\right) \tag{3.93}$$

其中Q为一常数，

$$Q=\frac{\sigma_{YC}^D}{c_p^2\rho_p} \tag{3.94}$$

我们可以利用（3.83）式和（3.88）式，把t用A_0/A来表示，(3.88)可以写成

$$t=\frac{L}{c_p}\left\{1-e^{\frac{1}{Q}\left(\frac{v_L}{c_p}-\frac{v_0}{Z^*c_p}\right)}\right\} \tag{3.95}$$

从（3.83）式解出v_L/c_p，

$$\frac{v_L}{c_p}=1-\frac{A_0}{A} \tag{3.96}$$

于是，把（3.96）代入（3.95）得

$$t=\frac{L}{c_p}\left\{1-e^{\frac{1}{Q}\left[1-\frac{A_0}{A}-\frac{v_0}{Z^*c_p}\right]}\right\} \tag{3.97}$$

最后，把（3.97）代入（3.93），化简得

$$\frac{h}{L}=Q+\left(1-\frac{v_0}{Z^*c_p}\right)-\left[Q+\frac{A_0}{A}\right]e^{\frac{1}{Q}\left[1-\frac{A_0}{A}-\frac{v_0}{Z^*c_p}\right]} \tag{3.98}$$

其中Q和Z^*分别见（3.94）、（3.89）式。这就是弹体变形部分的形状方程，即$\frac{h}{L}$和$\frac{A}{A_0}$的关系式。

当撞击停止时，塑性区域长度为h_2，该处的截面面积$A=A_3$，所以有

$$\frac{h_2}{L} = Q + \left(1 - \frac{v_0}{Z^* c_P}\right) - (1 + Q) e^{-\frac{v_0}{QZ^* c_P}} \tag{3.99}$$

李和托保（E. H. Lee, S. J. Tupper, 1954）[3-7]指出，泰勒的撞击模型只适用于实际撞击速度v_L低于塑性波速度c_P时，才能有效。如果实际撞击速度大于c_P，则塑性波实际上无法离开撞击接触面。在接触面不远处有一激波驻波，在激波之后方，压力很高，变形很大，材料急剧变热，一般会引起材料粉碎或熔解。所以，一直到v_L降低到c_P以下，这种情况，才能结束。在这一段时间里，柱形弹体的前端由于侵蚀而受到损失，而且也可能产生撞击闪光。李和托保的分析提供了弹体的相对撞击速度降低到c_P的理论根据，也可以用以估算由于侵蚀而受到的质量损失。当v_L降低到低于c_P以后，泰勒模型就可以使用了。本节前面的分析也可以使用了。所以当$v_L > c_P$时，撞击分析分为两个阶段。一个是原来的长度为L，质量为m_0，和速度为$v_0 > Z^* c_P$的弹体，通过第一阶段，即侵蚀阶段而变为长度L_1，质量$m_1 = (L_1/L)m_0$，速度$v_1 = Z^* c_P$的弹体；在第二阶段中，这个稍短的弹体以新的起始条件（即L_1, m_1, 和$v_1 = Z^* c_P$）而进入泰勒模型的撞击阶段。

现在让我们根据李和托保的理论来分析第一阶段的弹体侵蚀和质量损失情况。

设激波和接触面的距离可以略去不计，弹体剩余部分（长度为x）的运动方程为

$$-\sigma_{YC}^{D} A_0 = \rho_P A_0 x \frac{dv_L}{dt} \tag{3.100}$$

其中

$$dx = -v_L dt \tag{3.101}$$

所以，消去了dt后，得

$$\sigma_{YC}^{D} \frac{dx}{x} = \rho_P v_L dv_L \tag{3.102}$$

积分，得

$$\sigma_{YC}^{D} \ln x = \frac{1}{2} \rho_P v_L^2 + C'' \tag{3.103}$$

其中积分常数C''可以由初始条件决定。初始条件为

$$x = L \text{时}, \quad v_L = \frac{v_p}{Z^*} \tag{3.104}$$

于是，得

$$C'' = \sigma_{Yc}^{p} \ln L - \frac{1}{2} \rho_p \left(\frac{v_0}{Z^*} \right)^2 \tag{3.105}$$

把C''从（3.105）代入（3.103）式，整理后得

$$\frac{x}{L} = e^{-\lambda\left(\frac{1}{Z^{*2}} - \frac{v_L^2}{v_0^2}\right)} \tag{3.106}$$

其中λ见（3.24）式。在本阶段结束时，即当$v_L = c_p$

$$x = L_1 \tag{3.107}$$

把（3.107）式代入（3.106）式，即得第一阶段结束时的剩余长度L_1，

$$L_1 = Le^{-\lambda\left(\frac{1}{Z^{*2}} - \frac{c_p^2}{v_0^2}\right)} \tag{3.108}$$

这时的真正撞击速度为v_1它等于

$$v_1 = Z^* c_p \tag{3.109}$$

而剩余的弹体质量为

$$m_1 = \frac{L_1}{L} m_0 = m_0 e^{-\lambda\left(\frac{1}{Z^{*2}} - \frac{c_p^2}{v_0^2}\right)} \tag{3.110}$$

在第一阶段中质量损失

$$\Delta_1 m = m_0 - m_1 = m_0 \left\{ 1 - e^{-\lambda\left(\frac{1}{Z^{*2}} - \frac{c_p^2}{v_0^2}\right)} \right\} \tag{3.111}$$

§3.9　刚塑性弹体和变形靶板的穿透撞击的里希脱理论（1977～1978）

里希脱（R. F. Recht，1977～1978）[3-11,3-13]研究了刚塑性弹体和靶板撞击，一直到挤凿穿透的破坏过程。其各个阶段，可以用图3-14表示如下：在开始时，靶板是不动的，一个圆柱弹体以

质量m_0和速度v_0撞击靶板，一直到应力波自板的另一侧反射回来，回到弹体为止，这块靶板以半无限体的特性影响弹体（图3-14a）。只要剩余的一部分弹体的实际撞击速度 v 大于Z^*c_p，在撞击接触面的上方有激波的驻波。在这时，凡是穿过激波的驻波的弹性材料，即时被侵蚀融化掉，并发生撞击闪光。靶板表面也开始形成弹坑（图 3-14 b）。当 v 降到 Z^*c_p 以后，剩下的弹体按泰勒、李

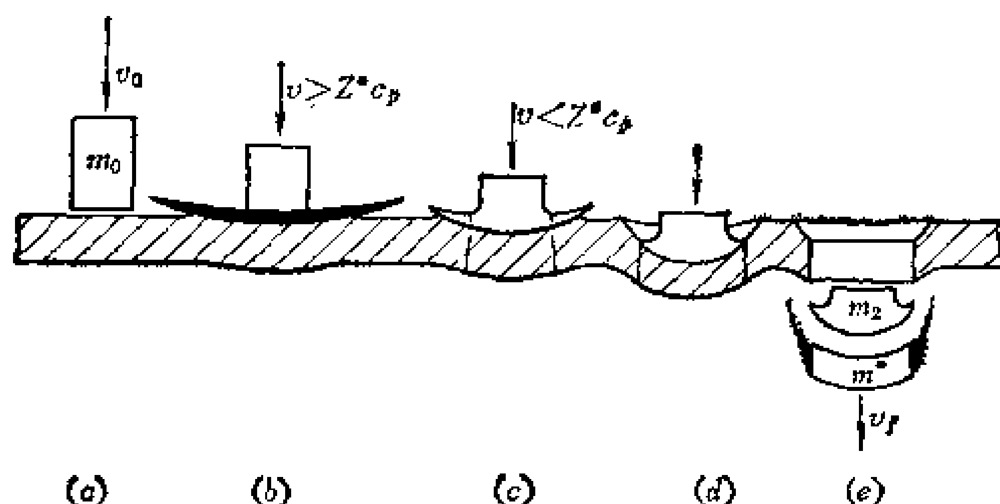


图3-14 靶板挤凿过程

（a） 撞击前；（b） 撞击闪光，激波侵蚀；（c） 变形成坑，质量损失；（d） 热塑性，挤凿切变；（e） 分离，发出闪光。

和村保的模式继续变形。由于板的成坑、隆起、和盘形凹陷成为靶板的主要变形特征，从而影响撞击接触面的运动（图3-14 c）。挤凿破坏开始，靶板中有一个柱形材料被挤凿掉，这个柱形材料的直径一般略大于弹体直径本身。根据实验观察[3-12]，挤凿下的靶板材料直径一般约为弹体直径的125%（图3-14 d）。当挤凿剪切发展时，在剪切变形的局部区域发生大量的热。由于变形很快，这种过程接近于绝热过程。熔化的材料常常发出闪光。如果这个过程发展较慢，在切剪面四周的材料温度较低，热量可以向这部分散出。最后弹体和被挤凿掉的靶板部分分别掉出，击穿挤凿过程完成（图3-14 e）。

图3-15是当撞击速度逐级提高时，挤凿结束后的弹体形状的

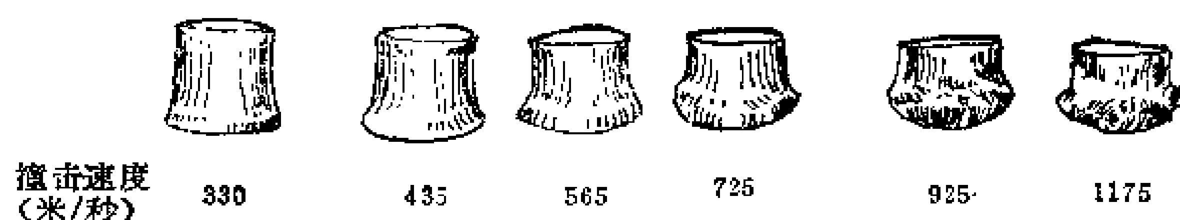


图3-15 弹体在挤凿出靶板后的外形（前三个速度没有质量损失）

照相的外形描绘图。开始三个弹体没有质量损失。在后面的三个弹体中，撞击速度越高，质量损失越大。

现在让我们计算挤凿出的靶饼的速度。

在挤凿过程中，我们如果略去靶板得到的冲量，我们有动量守恒方程

$$m_0v_0=m_Ev_E+(m_0-m_E+m_q)v_I \tag{3.112}$$

式中

m_0——弹体原质量；

m_E——尚未变形的弹体部分的质量；

m_q——挤凿出的靶饼的质量；

v_0——撞击速度；

v_E——尚未变形的弹体部分的运动速度；

v_I——挤凿出的靶饼的速度。

而且根据实验结论

$$m_q=\frac{1}{4}\rho_t(1.25D_0)^2h_0 \tag{3.113}$$

其中h_0为靶板原来的厚度，D_0为弹体原来的直径。还有

$$m_E=\rho_pA_0x=\rho_pA_0(L-c_pt) \tag{3.114}$$

而且，根据定义

$$v_E=v_L+v_I \tag{3.115}$$

其中v_L为弹体中塑性边界相对于运动中的靶体表面的速度。把(3.115)式代入(3.112)式，解出v_I，得

$$v_I=\frac{m_0}{m_0+m_q}v_0-\frac{m_E}{m_0+m_q}v_L \tag{3.116}$$

其中m_E、v_L分别由(3.114)、(3.87)式给出，它们都是t的函数。

在半无限靶体的条件下，最后弹体尚未变形部分的长度L_2由(3.91)式给出。对于靶板撞击而言，在变形结束时，弹体和靶体的凿出部分速度相等，亦即$v_L=v_b-v_I=0$，把它代入（3.87）式时，求得全程撞击时间t_2：

$$v_0+\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p}\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t_2\right)-v_I=0 \qquad (3.117)$$

或

$$t_2=\left(1-e^{-\frac{\rho_p c_p}{\sigma_{YC}^D}(v_0-v_I)}\right)\frac{L}{c_p} \qquad (3.118)$$

所以，最后剩下来的未变形的弹体长度应该是

$$L_2=L-c_p t_2=Le^{-\frac{\rho_p c_p}{\sigma_{YC}^D}(v_0-v_I)} \qquad (3.119)$$

从（3.112），由于在挤凿结束时，$v_E=v_I$，于是，有

$$m_0 v_0=(m_0+m_q)v_I \qquad (3.120)$$

或有

$$v_0-v_I=\frac{m_q}{m_0+m_q}v_0 \qquad (3.121)$$

把它代入（3.119），得剩余的尚未变形的弹体长度L_2为

$$L_2=Le^{-\frac{v_0 c_p\rho_p}{\sigma_{YC}^D}\cdot\frac{m_q}{m_0+m_q}} \qquad (3.122)$$

对于靶板挤压穿透后的弹体形状而言，我们有和半无限靶体相似的推导。

把（3.116）式代入（3.97），得

$$v_L=v_0+\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p}\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t\right)-\frac{m_0}{m_0+m_q}v_0+\frac{m_E}{m_0+m_q}v_L \qquad (3.123)$$

解出v_L，得

$$v_L=\frac{m_q}{m_0+m_q-m_E}v_0+\frac{m_0+m_q}{m_0+m_q-m_E}\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_p}\ln\left(1-\frac{c_p}{L}t\right) \qquad (3.124)$$

把它代入（3.80）式，得

$$dh = L\left\{\frac{c_P}{L} - \frac{m_q}{m_0 + m_q - m_E}\frac{v_0}{L} + \frac{m_0 + m_q}{m_0 + m_q - m_E}\frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_P L}\ln\left(1 - \frac{c_P}{L}t\right)\right\}dt$$

(3.125)

引入下列符号

$$J = \frac{c_P}{L}, \quad \gamma = \frac{m_q}{m_0}, \quad \alpha = 1 + \frac{m_q}{m_0}, \quad Q = \frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_p c_P^2} \tag{3.126}$$

前式可以写成

$$\frac{dh}{L} = \left\{J - \frac{\gamma}{\gamma + Jt}\frac{v_0}{L} + \frac{\alpha}{\gamma + Jt}QJ\ln(1 - Jt)\right\}dt$$

(3.127)

积分，得

$$h/L = Jt + \frac{Q}{1.56}\left\{(1 - Jt)\ln\left(\frac{1 - Jt}{\alpha}\right) + Jt + \ln\alpha\right\} + 0.96QJt - \left[Q\alpha\ln\alpha + \gamma\frac{v_0}{c_P}\right]\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}Jt\right)$$

(3.128)

在积分中，我们使用了$\alpha = 1 + \gamma$和近似公式

$$\frac{1}{1 - Z}\ln Z \cong \frac{1}{1.56}\ln Z - 0.96 \tag{3.129}$$

这个近似，除了在$Z < 0.1$以外，都很符合。但当$Z < 0.1$时，这个弹体相当于完全解体的问题，它在实际中并不常见。所以，我们认为（3.129）是一个很好的近似。

把（3.124）式代入$A/A_0 = 1/(1 - v_L/c_P)$，得

$$\frac{A}{A_0} = \frac{(\gamma + Jt)}{\gamma + Jt - Q\alpha\ln(1 - Jt) - \gamma v_0/c_P} \tag{3.130}$$

把（3.128）和（3.130）式放在一起，是h/L和A/A_0以t为参数的参数方程。

现在让我们研究在挤凿过程中的侵融问题。靶饼m_g在加速中发生侵融作用，让我们略去传给靶板冲量，设所有侵融掉的材料都和靶饼以相等的排出速度v_t一起排出去。于是有动量守恒定律，

$$\sigma_{YC}^{D}A_0dt+(v-v_I)(-dm)=m_g dv_I \tag{3.131}$$

但是

$$v-v_I=-\frac{1}{\rho_P A_0}\ \frac{dm}{dt} \tag{3.132}$$

而且，在微分后，得

$$\frac{dv_I}{dt}=\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\rho_P A_0}\ \frac{d^2m}{dt^2} \tag{3.133}$$

把（3.132)、(3.133）代入（3.131）得

$$\frac{d^2m}{dt^2}-\frac{1}{m_g}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2=\frac{\rho_P A_0^2\sigma_{YC}^{D}}{m_g}\left(1+\frac{m_g}{m}\right) \tag{3.134}$$

由于$\frac{m_g}{m}\ll 1$，可以略去。略去m_g/m后积分一次，并用初始条件（当$v-v_I=c_P$，$m=m_0$）定出积分常数后得

$$m_g=m_0+\frac{1}{2}m_0\ln\left\{\frac{\frac{1}{Q}-1}{\left(\frac{v_0}{c_P}\right)^2\frac{1}{Q}+1}\right\} \tag{3.135}$$

其中$Q=\sigma_{YC}^{D}/(\rho_P c_P^2)$

在侵融后，新的长度为

$$L_1=(m_g/m_0)L \tag{3.136}$$

让我们用相当直径$d=1.25d_0$作为和靶饼一起切割下来的材料的直径。这样，其截面积为$A=(1.25)^2A_0=1.56A_0$。为了计算切割下来的质量。首先从（3.130）式，求得$A/A_0=1.56$时的t，称为t_r；把这个t_r值代入（3.128）式中的t，求得有关的h值，并称为h_r。于是，剩下的弹体质量为

$$m_r=\rho_P A_0[L-c_P t_r]+\rho_P A h_r \tag{3.137}$$

或为

$$m_r=\rho_P A_0 L\left[1-Jt_r+1.56\frac{h_r}{L}\right] \tag{3.137a}$$

这里并不包括由于侵融而损失的质量。其中$\rho_P A_0 L$为弹体的原有质量，或

$$\frac{m_r}{m_0}=1-Jt_r+1.56\frac{h_r}{L} \tag{3.138}$$

参考文献

[3-1] U.S.Army Ballistic Research Laboratories, A Penetration Handbook (Joint Technical Coordination Group), Aberdeen Proving Ground, Maryland (1977).

[3-2] George, H. Jones, Proc. 2nd International Symposium on Ballistics, Session VB, American Defense Preparedness Association, Washington, D. C. (1976).

[3-3] D. J. Scott, Proc. Ist International Symposium on Ballistics, American Defense Preparedness Association, Washington, D. C. (1974).

[3-4] T. W. Ipson, R E. Recht and V. V. A. Schmelling, Report NWC TP 5607, Naval Weapons Center, China Lake, California (1973).

[3-5] R. T. Sedgwick and J. M. Walsh, BRL Report 3SR-348, U. S. A. Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Matyland (1971).

[3-6] G. I. Taylor, Proceedings of Royal Society (London), Series A, 194, 289 (1948).

[3-7] E. H. Lee and S. J. Tupper, Journal of Applied Mechanics, 21, 63 (1954).

[3-8] D. Raftopoulos and N. Davids, AIAA J. 5, 2254 (1967).

[3-9] 钱伟长，柱形弹体撞击塑性变形的卷帆理论的分析解及其改进，《理论物理和力学文集》科学出版社，73-90页 (1982)。

[3-10] A. C. Whiffin, Proceeding of Royal Society (London), Series A, 194, 300 (1948)

[3-11] R. F. Recht, Proc. 14th SES Annual Meeting, Lehigh University, Bethleham (1977).

[3-12] T W. Ipson, Report NMC TP 4533, Naval Weapons Center, China Lake, California (1968).

[3-13] R F. Recht, Taylor Ballistic Impact Modelling Applied to Deformation and Mass Loss Deformations, International Journal of Engineering Sciences, 16, 809-827 (1978).

第四章 靶体特性

§4.1 靶体类型

象公路、跑道、铁路、水坝坝体、船闸、桥梁等都是特别简单的靶体。它们的子结构很少，一有损坏就失掉有效的功能。一般说来，这种靶体不是半无限的，就是较厚的靶板。这种靶体的特性是易于说明的。

象军火库或贮油库也只具有较少的子结构，如果库房建在地面上，则一般是薄板靶元。如果库房建在地面下，则靶元可以算作是半无限体的。库房破坏不一定和库房失效连系在一起，但可以从杀伤和焚毁较简单地来评价其失效的程度。

象房屋建筑、工厂、地堡、地下掩体、飞机库等靶体，有很复杂的子结构。它们有的是薄板靶元，有的是厚板靶元。如果有很大一部份的结构埋藏在地下，则这一部份的靶元应该算作是半无限靶元。象工厂这样的复杂靶体，在破坏和失效之间，有着很复杂的关系。一般说来，这种靶体的破坏和失效只能分为两件不同的事件来研究。

象飞机、装甲车、飞弹、船舰等靶体，都有相当复杂的子结构，有许多功能性的子结构需要保护。任何一种子结构的破坏连系着某些功能的失效。有些靶元既可以是薄板，也可以是厚板。靶体的破坏和失效的关系，由于子结构种类多，功能的种类多，所以非常复杂。

对于象飞机或装甲车这样部件很多的靶体而言，对弹体的侵入分析往往看其沿着飞行路线在靶体内会遇上多少靶元来进行的。在最简单的情况下，弹体沿一条直线飞行，在各个靶元上并无折射现象。更复杂些的情况是弹体每经一个靶元，都有一定的

折射，于是弹体的总路线是一条折线。不论是直线或是曲折的路线，我们总是只研究那些逐一被撞的、处于飞行路线上的靶元。有些靶元是曲面，我们近似地只把它看作是一个切于撞击点的切面平板靶元，在撞击时当然不一定是垂直撞击，有时是斜撞。靶体的侵入被看作是弹体和它在飞行路线上遇到的各个靶元的交互作用。弹体所遇到的子结构，有的是要害，有的不是要害，对于是要害的子结构而言，撞击分析的目的，即既要弄明白弹体的剩余运动，又要弄明白子结构的失效情况。这种分析的方法，参考文献〔4-1〕中有系统和详细的说明。

这种分析过程可以由分析员根据靶体图和各子结构靶元的功能关系的有关数据来进行，这种分析过程也可以用计算机的程序自动进行。美国海军武器中心有三种计算机程序：

（1）MAGIC[4-3]，能够自动描述靶体情况（1969）；

（2）SHOTGEN[4-4]，能够顺着射击线获得数据（1970）；

（3）VAREA[4-5]，能够进行要害性分析（1970）。

时代杂志在1981年4月13日出版的一期上登载了一张美国

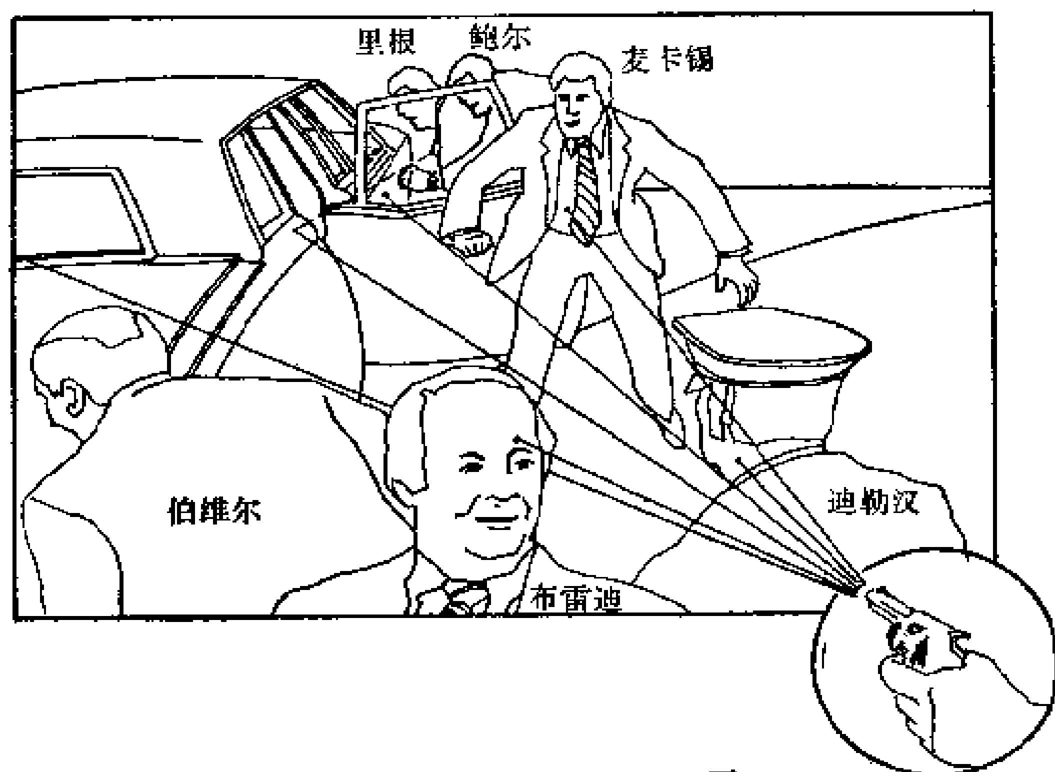


图4-1　里根遇刺的射击分析图

总统里根在3月底遇刺时二秒钟内六颗子弹的射击分析图[4-2]，它就是把现场相片通过计算机程序分析所得结果，里根就是在保安人员鲍尔把他推入汽车时，子弹由汽车后车箱的外侧，反弹向前，通过车身和开着的车门之间的隙缝，击中肺部而受伤的（图4-1）。

§4.2 决定靶体模式的各种假设

论述靶体特性时，有下列各种不言而喻的假定：

（1）局部影响：在撞击时，靶体上受撞击影响的区域很小，只局限于离弹体直径几倍远的范围。靶体其它部份的特性对于撞击的结果，影响很小，或毫无关系；

（2）可以略去靶体其它部份的刚体运动；

（3）略去一切热现象，这种热现象包括由于摩擦所生的热，由于变形或摩擦热对材料性能的影响，和它们所引起的相变；

（4）所有靶元的表面都是平面；

（5）靶元在撞击前没有应力。

在用了上述假设以后，对靶体在撞击中的性能分析，就可以简化得多。

§4.3 局部影响假定

从许多类型的弹体和靶体的撞击观察中可以看到，弹坑的变形大多数只有两三个弹体直径那样大。局部影响假定对于这类撞击而言，显然是合乎实际的。但当撞击速度接近弹道极限速度的时候这个假定是有问题的；当靶板较薄，出现弯曲型的靶板变形，发生所谓盘状变形时，这个假定也不适用。有一些关于形成盘状变形的研究报告中都曾叙述了一个事实，即当钝头弹体撞击薄靶板时，在弹坑周围有相当大一片是形成塑性变形的[4-6,4-7,4-8]。例如，文献〔4-6〕就报导过当弹体撞击铝合金板，其速度接近弹道极限速度时，塑性变形的影响波及离撞击点约10～12个弹体直径之远。在第七章中，我们还将讨论这一点。

§4.4 刚体运动假定

从弹道学的观点看，靶体只是看作为弹体运动的背境或环境。这等于说：每一部份靶体都是固定在空间不动的，也即是说，靶体中的任何靶元都没有刚体运动。所以，对于靶体而言，直接和弹体发生相互作用的，根据局部影响假定，只有和弹体直接接触的那一部份靶元。但是，根据刚体运动假定，这个靶元和靶体其余部份连结着，所以惯性质量应该是很大的。当然，即使靶体质量比弹体质量大了几倍，只要靶体有很小的局部运动，就会在计算中引起很大的误差[4-9]。很明显，如果靶元和弹体的质量大小相仿，而弹体射入靶元后被嵌埋在里面，则根据动量守恒定理，弹体和靶元合在一起获得弹体入射的动量，于是，最后弹体和靶元一起运动的速度和弹体入射速度之比，等于弹体质量和弹体、靶元的质量和之比。

如果说弹体和靶体质量相当，那作刚体运动的假定是不可思议的。如果说靶体中有一部分子结构，其质量和弹体质量相当，而这部份子结构是用一定强度的零部件安装在靶体整体上的，这样就合理得多了。分析这样一种安装在整个靶体上的靶元的运动，就可以采用挤凿理论的方法[4-10,4-11]。当弹体撞击这样的靶体子结构时，有一部分撞击能量用在把子结构从靶体上分离开来，有一部份能量用来使靶体变形。文献〔4-11〕指出，使靶体变形的这部分能量，可以从动量能量守恒定律求得，它恰好等于撞击能量减去靶体分离部份和弹体共同一起运动的动能。弹体和靶体分离部份共同一起的最后速度的计算方法，和挤凿过程中的弹体和凿下的靶饼的共同速度的计算方法相同。

§4.5 略去热效应的假定

在力学中略去热效应是众所习知的，这是因为弹性动力学和流体动力学中热耗很小，许多材料性质对所处温度不敏感，还有许多力学过程发展很快，需时很短，所以，略去热效应所带来的

影响很小。侵入过程，热耗很多，但这种热耗，只局限于很小的材料区域。当侵入速度增加时，耗热速度也增加，但耗热区域则缩小。所以，对于一般穿甲问题而言，人们论述材料性能时，一般不注意温度影响。但对超高速撞击时，要求知道材料的状态方程和材料性能的温度影响[4-12]。也有在一些通常的军用弹速的撞击研究中，同样使用了材料的状态方程和温度效应[4-13,4-14]。

§4.6 厚度判据

关于薄靶、中厚靶、厚靶的定义，业已在第一章中谈及。这种定义一般是由撞击作用从弹体和靶体的撞击接触面传播到它们各自的背面所需的时间长短所决定的。假定这种效果是通过应力波传播的，当弹体中的应力波来回传播一次时，靶体中的应力波一般可以来回传播多次。设这个来回传播的次数用 n 表示，则

$$n = \frac{c_t}{c_p} \cdot \frac{L}{h} \tag{4.1}$$

式中

c_t——靶体中应力波传播速度；

c_p——弹体中应力波传播速度；

L——弹体长度；

h——靶板厚度。

如果用 h/D 表示，其中 D 为弹体直径，则

$$n = \frac{c_t}{c_p} \cdot \frac{L/D}{h/D} \tag{4.2}$$

如果 $n > 5$ 时，靶元称为薄靶。这个数字是根据弹头前方靶体内的应力逐渐取得稳定值这个要求决定的。中厚度靶元的 n 在 $1 < n < 5$ 之间。在这种情况下，靶板背面的影响业已存在，但应力尚未稳定，厚靶元为 $n < 1$，应力波从靶元背面反射回来所需时间比弹体中的应力波反射回来所需时间还要长。这样选择的 n 大体上也能把薄、中厚、厚区分开来。它和用靶厚-弹径比来划分时，差别不大。

也有实验指出，靶元在撞击后形成盘状变形的不限于薄靶。

当然，在薄靶板的变形中，盘状变形最显著，但是，在中厚板的变形中，即使在 $n=2$ 时，有时也发生盘状变形。只有在 $n<2$ 时，才不发生盘状变形或只发生很微小的盘状变形。

§4.7 靶元材料

穿甲力学和靶元材料的关系很密切。靶元材料可以按材料来源来区分。如分为天然材料和人工材料。前者包括土壤、岩石、木材和水，后者包括金属、合金、陶瓷、塑料和一些化合物如橡胶。靶元材料也可以按轻重来区分，如分为轻材料、中等重的材料和重材料。轻材料中包括密度不超过 3 克每立方厘米的材料；如木材、塑料、陶瓷、土壤、许多岩石、轻金属、轻质合金；中等重材料的密度在 3～8 克每立方厘米之间，包括大多数的常见金属和合金：如钢、铜、黄铜、和锡等；重材料的密度在 8 克每立方厘米以上：包括铅、钨、和铀等。靶阻是用标准弹体在标准射击条件下射入靶体的深度来表示的。当然，靶体侵入现象的分析、解释和预测，都需要对靶体材料的各种物理性能的标定，如初始密度，较完整的本构关系，基本的破坏指标——如屈服和破坏极限等。

弹道学者对于物质材料的侵入度（Penetrability）特别有兴趣。用一种弹体射击一系列材料靶体时，所得的侵入深度，常能用来对比分析各种材料侵入度。例如，一个钝头钢弹，长度直径比为 8，撞击速度为 150 米每秒，垂直射击时对各种材料的侵入深度见表 4-1。从表上可以看到湿土和钢的侵入深度，差别竟达 7300倍之多。钢和铝的差别也达 5 倍之多。

把侵入度相比较，也可以对靶体材料进行粗略分类。靶元可以按这种抵抗侵入的能力分成三类：低阻抗的，主要是土壤；中阻抗的，包括混凝土、砖石、低强度金属等；高阻抗的，包括高强度金属、合金、和陶瓷等。这种分类法大体上和按相对厚度分类、按密度分类的结论相仿。不同类型的材料，发生的侵入现象不尽相同，研究侵入现象的观点也有区别。

表4-1　钝头钢弹侵入各种材料的深度

材　　料	侵入深度（用弹体直径的倍数表示）	实　验　者	参考文献
湿土	2200	C. W. Young (1967)	〔4-15〕
沙土	350	C. W. Young (1967)	〔4-15〕
混泥土（2500psi强度）	36	美国陆军部（1961）	〔4-16〕
混泥土（5000psi强度）	25	美国陆军部（1961）	〔4-16〕
铝合金2024 T3	1.5	《侵入方程手册》(1977)	〔4-17〕
钢（HB100）	0.6	《侵入方程手册》(1977)	〔4-17〕
钢（HB350）	0.3	《侵入方程手册》(1977)	〔4-17〕

抵阻抗材料都是土质材料。这种材料都是多孔性的，也都是颗粒状的。而且，许多土壤都有很大的不均匀性和各向异性。不同取样，有不同的夹杂物，而且夹杂物的尺寸也很不一致。从流变学的角度看，土质材料和一般建筑材料很不一样。这两类材料的性能很难互相比较。半无限靶体基本上都是低阻抗材料组成的。

在另一方面，高阻抗材料，一般或多或少都是均匀的、各向同性的，性能都能模拟和重现，靶元可以当作是一种制成品，它对于射击的瞬态反映是可以定量测定的。这种材料一般都用来制作薄板和中厚板的靶元。

中等阻抗材料一般都是混合物，它具有金属一样的均匀性和各向同性，有时象混凝土由于骨料的存在也会有些不均匀性，由于加强筋料的存在而有些各向异性。木材本身由于纤维取向不同而具有各向异性。但从流变学的角度看，它们和金属一样，可以用相同的模型来研究，其结果仍有足够的准确性。中等阻抗材料一般用来制作中等厚度的靶元。对所有材料而言，一般都能用它的物理特性来描述其作为靶体材料的作用。

材料的性能和状态一般都用一种模式来表示。这种模式既能反映其物相状态，也能反映其性能。大多数靶体是以固体来作为其模式的，这种固体模式既可以是连续系统的，也可以是颗粒性的。有时靶体的材料在撞击过程中反映出流体的特性。例如固体

在超高速撞击中产生了很高的压强，这种固体在这样高的压强下运动变形时就像流体一样。在目前还没有见到有什么人把靶元材料看作是气体的。靶体（固体模式）特性决定于均匀性和各向同性。对于均匀性讲，指的是靶体在动力条件下，其不均匀度小于脉冲尺寸的那种材料。有时靶体也可以用组合模式来表示，例如某一区域是固体、某一区域是流体的那种组合模式。固体模式也包括那种分区属于弹性、塑性、粘性和流体力学特性的组合模式。流体模式既可以是可压缩性的，也可以是不可压缩性的；既可以是粘性的，也可以是非粘性的。固体在应力超过某一临界值（即屈服应力）时产生永久变形，而且服从流动规律，而当应力达到极限强度时，产生断裂破坏。固体中应力根据其作用的性质分为拉伸应力、压缩应力、剪应力或弯曲应力。当液体中的拉伸应力超过某一限度时，液体中产生空穴，这是液体状态的一种破坏。

靶体在弹体的侵入过程中，经历了从零起直到很高的应力作用的历程，出现了非常复杂的变形和破坏型式，所以，为了研究弹体侵入而产生的靶体材料的力学问题，也将是非常复杂的。而且，有些材料模式的力学性质，只是从有限几种试验中测得的。我们常常要把这些实验结果引伸推广，才能用到撞击过程中来；并且，在这种范围内，实验结果是否还可以用，还值得仔细推敲。例如，我们可以用一维（即焊件）的实验数据，求得一些弹性常数，这些弹性常数在动力问题和静力问题中基本相同，同时，这些一维实验决定的弹性常数同样可以推广应用到三维问题中去。但在塑性区域中，这种推广办法就不是那样有效，例如，我们就没有可靠的动力屈服强度数据，尤其在空间应力条件下的动力屈服强度数据，更付缺如。在这个塑性范围内的动力本构关系，采用了静力条件下的本构关系（如§2.4）和它们的相关流动定律。关于流体静压和容积变形的关系，采用了一维实验测定的虎各努脱(Hugoniot）关系，只是从中扣除了内能的影响。对于这种关系是否适用于三维的问题，和它是否适用于多变的热力学过

程[⊖]，尚待解决。实际上，这些问题的数值解法所得结果是否有效，主要取决于这些材料性能的测定是否可靠。

金属和塑料等靶元材料的力学性能比较可靠。它们很接近于理想的均匀体和各向同性体，它们的本构关系是众所周知的，它们的数学描述也比较简单。拉和压的反应是相似的，可以类比的，它们也有很好的粘聚结合性。反之，复合纤维板，或其它用嵌埋纤维而加强的材料以及许多岩石都是各向异性的；陶磁材料的拉压强度相差很大；土质材料都有很大的不均匀性；颗粒材料如沙土和土壤都是不均匀的，而且又是松散的。这些材料的本构方程研究得不多，也很少被利用。

金属和合金材料经常当作靶体材料来使用。因此，它们的力学性能，更值得注意。由于它们是各向同性的，所以在弹性范围内，只用两个弹性常数（杨氏模量E和泊桑比ν，或拉梅常数λ和G）就能描写一切力学性能。其它还有材料的密度ρ，在研究撞击时，也是重要的。弹性区域的极限是用屈服强度σ_Y来表示的，通常它们是从单向拉伸或单向压缩的应力应变曲线求得。对于多维屈服问题而言，屈服面是按应力不变量的理论，只和这个单向屈服强度有关。最常用的假设是，σ_Y只和二次不变量$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$有关，例如冯密西斯（Von Mises）屈服条件或屈列斯卡（Tresca）屈服条件（见§2.4）。有关流动定律指出，应变矢量的方向永远垂直于屈服面。

在应力分析中，我们既可以采用理想塑性材料，也可以采用强化塑性材料的模式。理想塑性材料中，σ_Y保持不变；强化塑性材料中，σ_Y和加工历史中所做塑性功有关[4-18]。有些材料的σ_Y和应变速度有关[4-19]；还有不少其它模式，在塑性应变上还叠加着粘性变形的分量[4-20,4-21]。

在应力空间内的通用断裂准则，目前还不存在。但在单向受

⊖ 在工程中也称为多方热力学过程，在英文中称为Polytropic Thermodynamic Process。——编者注

力状态下，单向的破坏极限是可以用极限拉伸强度σ_{UT}，或破坏极限应变e_{UT}来表示的。除此而外，当断裂发生时，应力地区中的应变能应该降低。

硬度是代表材料对静力或动力的阻抗的量度。例如，用球体作压痕侵入试验时，其弹坑的直径就称为布氏硬度数（用 BHN 表示）。这个数和压缩屈服极限近似地成正比[4-22]。

$$BHN \approx 3.6\sigma_{YC} \tag{4.3}$$

金属冶炼过程对于材料性能也有很大影响。但限于篇幅，其讨论只好从略。

对于层裂这样的破坏而言，用上述各种简单的破坏理论，是无法解决的。要理解象层裂这样的破坏，我们既要知道应力状态，可能还要知道应力状态的历史；受有应力的地区的尺寸；断裂的临界应力值；和材料的有效表面能量等情况[4-23]。最近有一个较受公众注意的破坏准则，称为累计破坏准则[4-24]。这个准则用一个应力泛函$f[\sigma(t)]$来表示，它是应力$\sigma(t)$的函数。例如

$$f[\sigma(t)]=\frac{1}{A_r}[\sigma_r-\sigma(t)]^{b_1}\quad \sigma_{(ch)}\leqslant\sigma\leqslant\sigma_r \tag{4.4}$$

其中A_r，b_1都是常数，$\sigma_{(ch)}$是理论凝聚强度。σ_r是和长期断裂应力σ_R有关的应力，σ_R可以按应力脉冲的所用时间的函数来表示。这个关系和铝合金 6061-T6 的实验观测结果很接近。当空穴形成量累计达 1 时，亦即

$$\int_0^{\tau_R} f[\sigma(t)]dt=1 \tag{4.5}$$

即发生层裂破坏。其中τ_R称为断裂时间。这个公式可以用来解释层裂实验。

其他撞击破坏可以用各种不同的破坏准则来衡量，例如在挤凿破坏中，绝热剪切是很明显的，人们就采用了剪切带这样的准则来组成计算模式[4-25]。对于均匀介质材料的破坏准则的详细讨论，可以参考文献〔4-26〕。

关于材料性能的实验数据很多，我们在这里只能略举三个例

子作为典型。表 4-2 列举三种常用靶体金属合金材料的静力常数和破坏屈服数据[4-27,4-28]，这三种材料都是均匀的，而且是各向同性的。

表4-2　三种常用金属合金靶体材料的力学性能数据

材料名称		2024-Al-T4	Ti-5Al 2.5Sn（轧制、退火的）	SAE, AISI-4130（857°C下用油冷却，538°C下回火）
ρ（克/厘米³）		2.77	4.46	7.85
E (GPa)	拉伸(T)	74.2	110	200
	压缩(C)	72.8	110	200
G (GPa)	剪切(S)	27.6	48.2	77.5
ν 泊桑比		0.33	0.34	0.29
BHN（布氏硬度数）		120	286	305
σ_Y(0.2%) (MPa)	拉伸(T)	324	827	910
	压缩(C)	324	896	1000
	剪切(S)	174*	455	500
σ_U (MPa)	拉伸(T)	438	861	1034
	压缩(C)	—	793	—
	剪切(S)	283	758	655
伸长度，2英寸的(%)		20	15	20
ϵ_{UT}		0.010	0.011	0.010
截面缩减(%)		—	40	60

* 作为σ_{YT}的55%计算的。

如果金属的屈服强度和破坏强度差别很大，则我们可以近似地用线性的硬化曲线来表示其塑性区域的特性。在某些情况下，单向应力应变曲线（包括屈服极限和破坏极限）和应变速度有显著关系[4-29,4-30]。一般说来，铝合金的单向应力应变曲线和应变速度关系不大，相应的最大偏离只有 15%，有不少情况，这种偏离根本看不出来；钛合金和钢的力学性能和应变速度有较大的关系。已有若干专著专门论述材料的动力特性（如[4-31, 4-32]）。

提高温度一般引起模量和极限强度的降低，象 2024-T4 铝合金在 425℃时的 E 值比在室温时的 E 值约低 25%[4-33]。在增加试件尺寸时，模量和强度也稍有减低。铝合金的粘塑性松弛时间 γ 等于1‰秒，而各种低碳钢的粘塑性松弛时间 γ 则在 1～2%秒之间[4-34,4-7]。

在流体动力学的范围内，密度和可压缩性是描述材料力学性质中最重要的两个量，而强度问题则居次要地位。固体的流体动力学模式是由材料的压强和密度之间的关系描述的。在这个关系中，有时考虑内能，有时不考虑内能（见 §2.4），有时则把激波速度 U 和质点速度也考虑在内。建立这种单向的应力应变曲线的基本资料是从激波的波前数据得到的虎各努脱曲线，图 4-2 为表 4-2 所讲的三种材料的虎各努脱曲线，有的是直接的实验曲线，有的则经过了一定的理论修正。用热力学关系，我们可以在图 4-2 的曲线附近，绘制有关的绝热的和等温的 P-ρ 变化曲线[4-39]。

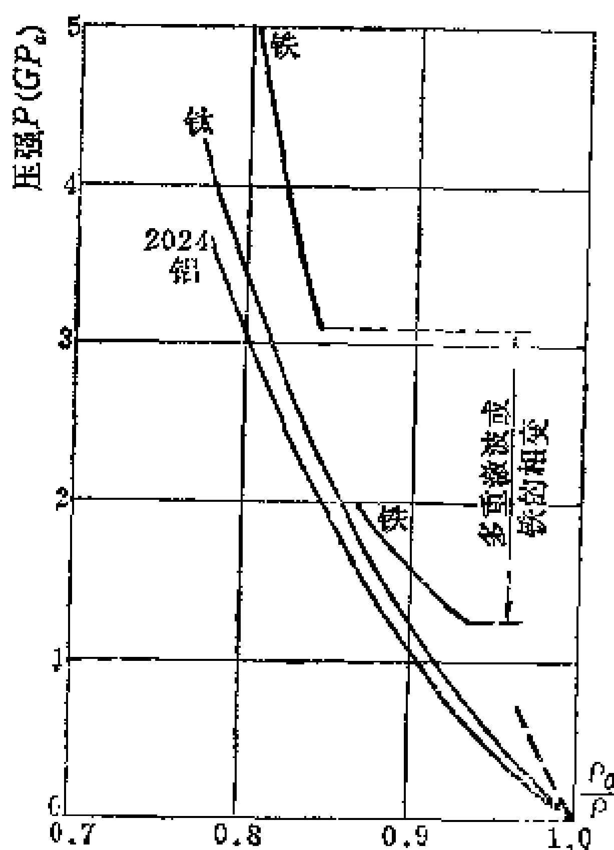


图4-2 铁、铝、钛的虎各努脱曲线

有关其它金属的资料可以参考〔4-36, 4-27, 4-28〕。土质材料的模式可以用有滞后现象的弹性理想塑性的固体来表示[4-35]。岩石和土壤的力学性能见参考文献〔4-37,4-38,4-39〕。塑料的力学性能见参考文献〔4-40〕，陶磁的力学性能见参考文献〔4-41〕。

土壤、砖石 混凝土是多相介质。在多相介质中，应考虑两

相以上的介质的相互作用。多相介质的特殊情况之一为固体和孔隙两种"介质"组成的材料。分析这种固体和孔隙组成的材料可以用不可压缩球状材料所组成的模式。这种不可压缩的球体服从库仑破坏律。从这种模式求得的压强与容积关系，适用于多孔性岩石的力学特性。图 4-3 和图 4-4 是沙岩和凝灰岩的压强-容积理论曲线和实验测定值的比较[4-42]。可以看到理论和实验很一致。

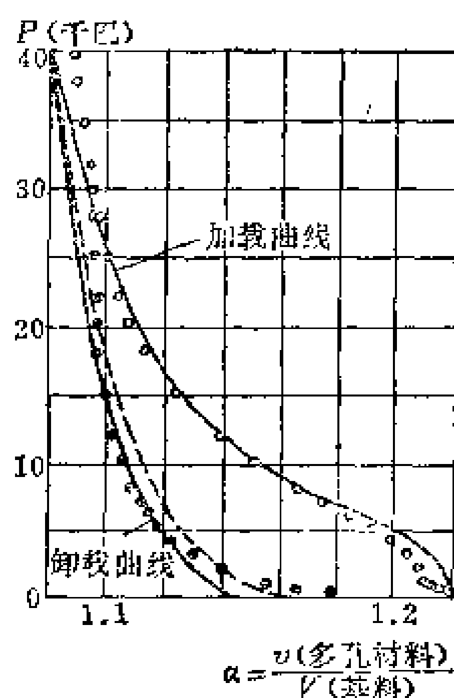


图4-3 沙岩的加载卸载曲线（理论和实验）

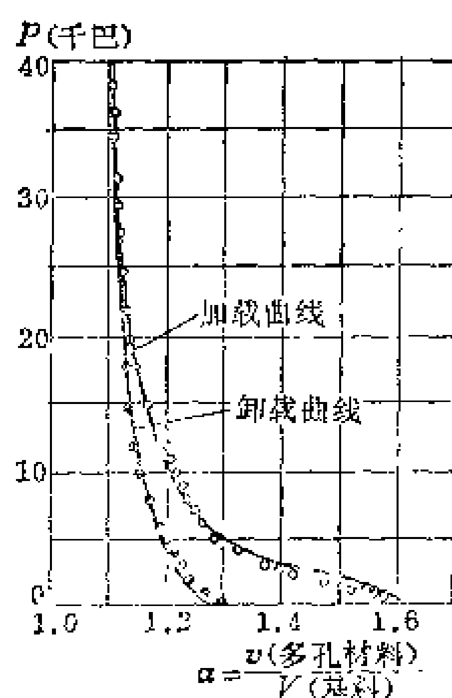


图4-4 凝灰岩的加载和卸载曲线（理论和实验）

参 考 文 献

〔4-1〕 T. W. Ipson, Report NWC TP 1533, Naval Weapons Center, China Lake, California (1968).

〔4-2〕 TIME Newsmagazine 117 (15), p. 26 (April 13, 1981).

〔4-3〕 R. F. Recgt, T. W. Ipson and E. P. Wittrock, Report NWC TP 4871, Naval Weapons Center, China Lake, California (1969).

〔4-4〕 Naval Weapons Center, Report Technical Note 4565-7-70, Vol. I, China Lake, California (1970).

〔4-5〕 Naval Weapons Center, Report 61, JTCG/ME-71-5-1, Vol. I, China Lake, California (1970).

[4-6] P. Beynet and R. Plunkett, Experimental Mechanics, 11, 64 (1971).

[4-7] C. A. Calder and W. Goldsmith, International Journal of Solid Structure, 7, 863 (1971).

[4-8] C. A. Calder, J. M. Kelly and W. Goldsmith, International Journal of Solid Structure, 7, 1143 (1971).

[4-9] W. J. Stronge, AIAA J., 3, 570 (1965).

[4-10] R. F. Recht and T. W. Ipson, Journal of Applied Mechanics, Transections ASME, 30, 381 (1963).

[4-11] J. F. Heyda, S. B. Woodall, D. A. Wolfgang and L. L. Wilson, Report AFATLTR 70 78, Air Force Armament Laboratories, Eglin Air Force Base (1970).

[4-12] R. T. Sedgwick, Technical report AFATL-TR-68-61, Air Force Armament Laboratories, Eglin Air Force Base (1968).

[4-13] D. C. Pack and W. M. Evans, Proceedings of Physics Society (London), B64, 298 (1951).

[4-14] George H. Jones, Proc. of 2nd International Symposium on Ballistics, Session VB, American Defense Preparedness Association, Washington, D. C. (1976).

[4-15] C. W. Young, Report SC-DR-67-60, May and SC-TM-66-2611, April, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico (1967).

[4-16] Department of the Army, Report TM 5-857-4, Headquaters, Washington, D.C. (1961).

[4-17] U. S. Army Ballistic Research Laboratories, A Penetration Equations Handbook (Joint Technical Coordination Group), Aberdeen Proving Ground, Maryland (1977).

[4-18] R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, Oxford (1956).

[4-19] R. T. Weiss, W. Goldsmith and K. Chase, Journal of Polymer Sciences, Part A-2, 8, 1713 (1970).

[4-20] R. M. Christensen, Theory of Viscoelasticity, An Introduction, Academic Press, New York (1971).

[4-21] P. Perzyna, Proceeding of Vibration Problems, 3, 281 (1963).

[4-22] W. Herrmann and A. H. Jones, ASRL Report No99-1, Massachusetts Institute of Technolgy, Aeroelastic and Structures Research Laboratory (1964).

[4-23] J. J. Gilman and F. R. Tuler, International Journal of Fracture Mechanics, 6, 169 (1970).

[4-24] F. R. Tuler and B. M. Butcher, International Journal of Fracture Mechanics, 4, 431 (1968).

[4-25] D. Shockey, L. Seaman and D. Curran, Report 003-75, Stanford

Research Institute, Poulter Laboratories, See also D. Erlich, L. Seaman, D. Curran and D. Schockey, Proceeding of 14th Society of Engineering Sciences. Annual Meeting (1977).

[4-26] L. Seaman, T. W. Barber, JR. and D. R. Curran, Report AFWL-TR 156, Air Force Weapons Laboratory, Kirtland Air Force Base, U.S.A. (1971).

[4-27] American Society for Metals, Metals Handbook, 8th Edition, Vol. I, (1967)

[4-28] Engineering Alloys Digest, Alloy Digest, Montclair, New Jersey, (1973).

[4-29] A. L. Austin and R. F. Steidel, Proc, ASTM 59, 1292 (1959).

[4-30] C. J. Maidan and S. J. Green, Report TR-65-26, General Motors Research Laboratories, Santa Barbara, California (1965).

[4-31] American Society of Testing Materials, ASTM Spec. Tech. Publ. 336, Philadelphia (1963).

[4-32] G. Shewmon and V. F. Zackay (editors), Response of Metals to High Velocity Deformations, Interscience, New York (1961).

[4-33] L. F. Vosteen, NACA Technical Note 4348 (1958).

[4-34] J. M. Kelly and T. Wierzbicki, Zeits. Angew. Math. Mech., 18, 236 (1967).

[4-35] M. H. Wagner, W. S. Goerke and K. N. Kreyenhagen, Report DNA 3537F, Defense Nuclear Agency (1976).

[4-36] M. H. Rice, R. G. McQueen and J. M. Walsh, Solid State Physics, 6, 1 (1958).

[4-37] Geological Society of America, Handbook of Physical Constants, Revised edn, Memoir 97 (1966).

[4-38] J. C. Jaeger and N. G. W. Cook, Fundamentals of Rock Mechanics, Chapman and Hill, London, Science Paperbook (1976).

[4-39] K. Terzhagi and R. B. Peck, Soil Mechanics in Engineering Practice, 2nd Edn. John Wiley, New York (1967).

[4-40] J. H. Du Bois and F. W. John, Plastics, 5th Edn. Van Nostrand-Reinhold, New York (1974).

[4-41] A. G. Evans and T. G. Langden, Progress of Metal Science, Vol 21, P. 171, Pergamon Press, Oxford (1976).

[4-42] J. J. Bhatt, M. M. Carroll and J. F. Schatz, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, E42, 363 (1975).

第五章　半无限靶体

§5.1　引　　论

对半无限靶体而言，既无所谓靶体的背面，也谈不上有什么弹道极限。象土坝或深埋的地下设施等都可以看作是半无限靶体。当攻击这些设施时，弹体一定要装有炸药，而且要有一定深度的侵入，在一定的深度爆炸，才能给与这种设施以有效的破坏。

半无限靶的撞击相图中没有弹道极限曲线，而回跳极限曲线是由弹体的材料性质及其形状特点决定的。弹体完整性要求较高。因为要妥善保护引爆装置和炸药，就只能允许弹体有较小的变形。在一般动能弹体中，这一点变形是完全容许的，但在装有炸药的炸弹中，在某种意义上就算是破坏了。所以，这种装药弹体的撞击相图中，只有回跳极限曲线和允许微量变形条件下的弹体变形曲线两种界线。图 5-1 是装满炸药的，卵形弹头的弹体，在俯冲角和偏航角都是零度的条件下，撞击淤泥沉积土（硬土）撞击相图。变形极限曲线是根据 45° 斜角以 550米/秒速度撞击的轴向力作用下的弹体变形来估计的。这样估计当然有一定的随意性，

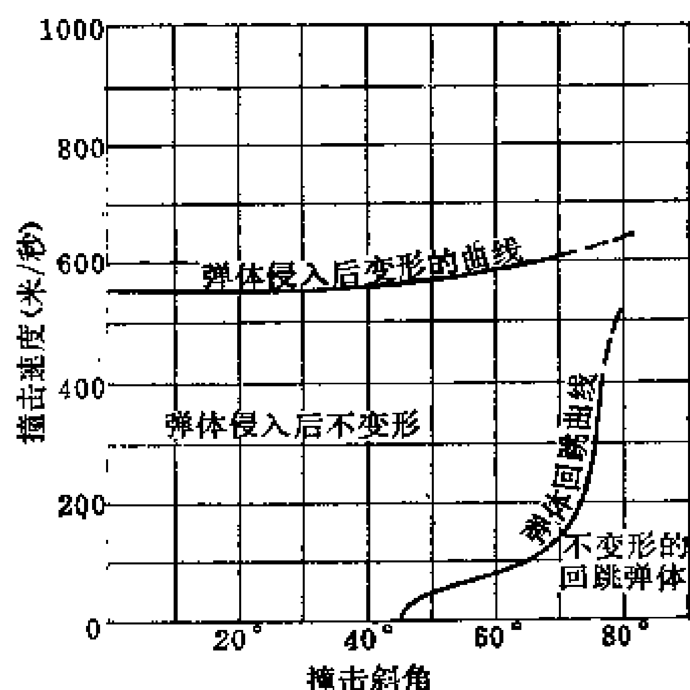


图5-1　卵形弹头的装药弹体和中等阻抗的淤积土（硬土）的撞击相图

但从弹体的破坏试验看，还是有效的。这类撞击相图可以用于指导飞机投弹。有些炸弹规定须在某一高度投掷，高度不够，撞击速度偏低，虽然命中了，但钻入地面不深，对深埋工事无损。如果投掷高度过高，撞击速度就过高，超过了相图的弹体变形曲线。这样的弹体，由于引爆装置或炸药失效，或根本不炸，或在地表提前爆炸，同样都不能完成对深埋工事的破坏作用。对山坡上的深埋工事进行投弹时，就要考虑到回跳曲线的限制。如果飞机顺着山脊飞，由于山坡有倾角，弹体撞击山坡面的斜角，常常超过回跳极限曲线的限角，造成空投失效。对这种工事的空投飞行一定要取垂直于山脊的飞行路线，这样投掷，其撞击斜角就能大大减小。

原先人们并不重视空投炸弹的运动学。在第一次大战时，很多炸弹，虽然命中了，但不超破坏作用。第二次大战时，有了改进，但是低空投掷，由于地面防御火力的反击，常常是得不偿失，为了解决这个矛盾，人们开始在弹体上安装尾翼或尾圈装置，它们既能稳定炸弹的倾角和偏航角，又能增加弹体飞行阻力。因而人们可以改用高空投弹。这样，当炸弹下落时，速度逐步提高，阻力也随着提高。最后阻力达到和重力相等时，炸弹达到极限速度。这个极限速度就是撞击速度，只要极限速度低于相图规定的弹体变形曲线，则每个炸弹只要命中目标几乎都能发挥对地下工事的破坏作用。

关于回跳问题的工作做得很少。只是对水和沙土这样的介质有过一些分析工作[5-1,5-2,5-3,5-4,5-5]。美国的《侵入方程手册》[4-17]中曾对金属靶的实验数据进行了一些分析，其结果当然同样能被用来处理硬质土壤的。而且这个分析并不限于厚靶板，也适用于半无限靶体。文献〔5-6〕中曾对卵形弹头的弹体回跳问题，进行分析研究，图 5-1 上的回跳极限曲线就是根据这个理论结果换上硬质土壤的常数而得到的。

文献〔5-3〕、〔5-5〕曾研究弹体从水中回跳的问题。这种分析当然也可以研究对沙土的回跳问题。他们研究了球体在侵入水面

后，由于水流经球体表面所生的举力和弹体本身重力的联合作用，弹体的运动轨迹线所受到的影响。这个研究给出了下列回跳曲线的公式：

$$v^2 = \frac{4Rg}{\frac{1}{10}\frac{\rho_f}{\rho_p} - \theta^{*2}} \tag{5.1}$$

其中 R 为球形弹体的半径，θ^* 为入射斜角的余角，g 为地球引力加速度。有关球体的实验回跳曲线，见第一章的回跳相图。这些曲线在 30°～60° 之间都已得到实验的验证。

对于尖头弹体而言，由于弹体运动中有偏航角和倾角的问题，所以回跳问题比较复杂。这种弹体的偏航角和倾角往往会大到使弹体产生翻滚现象，于是弹体轨迹线突然产生较大的偏航，这种轨迹线方向的突然变化，被称为惊变。

尖头弹体的惊变，比钝头弹体的惊变大。如果弹长-弹径比小，这种惊变就小。

当尖头弹体侵入土壤时，从土壤中的弹孔形状可以看到土壤和弹体有分离的现象，从弹体表面所受土壤的刮痕中也可以看到这种流土分离的现象。这种流土分离的现象经常使土壤对弹体的压力中心前移。如果压力中心移至弹体重心的前方，则弹体的运动就不稳定。于是弹体的偏航角和倾角只要有所增加，这种压力中心的前移就造成偏航角和倾角进一步增加，而不是改善这种偏航角和倾角的不稳定情况。这种不稳定性对于回跳现象而言，就使尖头弹体强烈地受弹体取向的影响，即使有很小的倾角，在土壤中的射击线就会发生很大的偏向。在许多场合下，微小的弹体倾角或偏航角是测不出来的，因此确定尖头弹体的轨迹线比较困难。

人们对弹体侵入半无限靶体的深度和撞击速度、撞击斜角以及弹体取向的关系特别关心。下面将讨论一下有关经验公式和分析模型。

§5.2 经验公式

弹体侵入深度P和弹体以及靶体特性的经验公式有下列几种：

（1）邦锡莱（Poncelet，1829）[5-7]公式

$$P=\frac{m}{2a_{10}}\ln\left(1+\frac{a_{10}v_0^2}{a_8}\right) \tag{5.2}$$

（2）里萨尔（Resal）[5-8]公式

$$P=\frac{m}{a_{10}}\ln\left(1+\frac{a_{10}v_0}{a_9}\right) \tag{5.3}$$

（3）彼屈莱（Petry）[5-8]公式

$$P=a_{11}\frac{mg}{A}\ln\left(1+\frac{v_0^2}{20000}\right) \tag{5.4}$$

（4）杨（Young，1967）[5-8]氏公式

$$P=13.4a_{13}\Phi\sqrt{\frac{mg}{A}\ln\left(1+\frac{v_0}{465}\right)},\quad 当\ v_0<61米/秒 \tag{5.5a}$$

$$P=(0.257)a_{13}\Phi\sqrt{\frac{mg}{A}}(v_0-30.5),\quad 当\ v_0\geqslant 61米/秒 \tag{5.5b}$$

其中a_8，a_9，a_{10}，a_{11}，a_{13}都是有量纲的材料常数；Φ是形状因子。所有速度v_0的单位用米/秒，m的单位为克，A为弹体表面面积，单位用平方厘米。所有这些公式，都假定弹体的轨迹线是直线；如果撞击有斜角，我们假定当弹体侵入靶元时，并不由于弹体受偏心荷载而发生轨迹线的偏离。

我们必须指出，$v_0=61$米/秒是沙土中的声速。邦锡莱公式（5.2）和里萨尔公式（5.3）在v_0很大时，应该是等同的，当v_0很大时，$\frac{a_{10}}{a_8}v_0^2\gg 1$，$\frac{a_{10}}{a_9}v_0\gg 1$，于是（5.2）、（5.3）可以依次近似地写成

$$P=\frac{m}{2a_{10}}\ln\frac{a_{10}v_0^2}{a_8}=\frac{m}{a_{10}}\ln\frac{a_{10}v_0}{\sqrt{a_8a_{10}}} \tag{5.6a}$$

$$P=\frac{m}{a_{10}}\ln\frac{a_{10}v_0}{a_9} \tag{5.6b}$$

两式相等，有

$$a_9=\sqrt{a_8a_{10}}\quad 或\quad a_8=\frac{a_9^2}{a_{10}} \tag{5.7}$$

所以，只要 a_8、a_{10} 已知，就可以计算 a_9。表 5-1 是三类土壤靶体的 a_8、a_9、a_{10}、a_{11} 和 a_{13} 的值。

从杨氏方程（5.5）中，我们看到 P 和 $\sqrt{mg/A}$ 成正比。这就指出，P 和弹体标准尺寸 D 之间，有一定的联系。如对于相同的弹型和相同的撞击速度 v_0 而言，用弹径 D_1，得深度 D_1；用弹径 D_2，得深度 P_2，则有

$$P_1/D_1=P_2/D_2 \tag{5.8a}$$

这种结论，早就有人从实验中发现了。如杨[5-8]就曾用 100～460 毫米直径的弹体进行了在沙土中的射程试验，其结果就证实了（5.8a）式的尺寸关系。

（5.2）～（5.5）诸式，从理论上讲，可以由第二章的阻力公式导出。它是[5-10]

$$m\frac{dv}{dt}=F=a_8+a_9v+a_{10}v^2 \tag{5.8b}$$

其右边三项分别代表三种阻力。即

$$a_{10}v^2=\frac{Ac_D}{2}v^2=压强阻力 \tag{5.9a}$$

$$a_9v=6\pi\rho\nu\left(\frac{D}{2}\right)v=粘性阻力 \tag{5.9b}$$

$$a_8=A\sigma_Y=塑性流阻力 \tag{5.9c}$$

式中 c_D 为压强阻力系数；ν 为材料粘度系数；A、D 分别为弹体表面面积和弹体截面直径；σ_Y 为靶体材料的剪切屈服强度。

美国莫夫（J. D. Murff）和柯尔（H. M. Coyle）等[5-11]曾提

表5-1　三种土壤的侵入阻抗常数

土壤分类	细长弹体的 $a_{13}\phi$	Petry 公式的 a_{11}	密度（克/厘米³）	历史常数 a_8	a_9	a_{10}	车辆通行情况
1.软土							对普通车辆太软
部分饱和的粘土		0.017～0.028	1.6～2.0				
潮水冲平的湿软泥	40	0.078	1.1～1.5				
软湿粘土	50		1.5～2.0				
标准软土（30%沙，30%淤泥，40%粘土）				3.39	7.71	17.8	
2.中等软土							可以通行普通车辆，但行动困难
松的湿沙	6.5	0.0072-0.010	1.0				
黄土（沃土）							
松而干的沙土							
冲积层							
湿沙有淤泥的							
粘土							
标准沃土（50%沙，35%淤泥，15%粘土）				7.31	12.30	20.7	
3.硬土							各种车辆都能通行
有淤泥的干沙土	2.5	0.0035～0.0039					
粘土多的冻结层淤泥	3.8	0.0042～0.0046	2.7				
冰川的冰	4.2	0.0057	1.0				
硬的密实的粘土多的淤泥	5.2		2.6				
标准硬土（95%沙，5%淤泥）				15.7	19.7	21.7	

出了阻力是速度 v 和侵入深度 z 的函数，这个函数也可以展开为 v 和 z 的双重幂级数

$$m\frac{dv}{dt}=A_1+A_2z+A_3z^2+A_4v+A_5v^2+A_6zv+\cdots \qquad (5.10)$$

其中 A_i 是从实验结果中用统计方法决定的。如果弹体的直径 D 和弹头长度 L_N 也计算在内，则（5.10）可以写成

$$m\frac{dv}{dt}=D^2\left\{\left(\frac{L_N}{D}B_1+B_2\right)v+B_3\frac{z}{D}+B_4\right\} \qquad (5.11)$$

（5.8b）、（5.10）、（5.11）都是从射击数据建立的弹体运动方程。

§5.3 空穴膨胀理论

英国毕学柏（1945，Bishop）[5-12]曾研究了空穴在土壤介质中膨胀的理论，他们只研究了球穴和圆柱穴的膨胀。他们的假说为

（1）把空穴四周区域分为三个部份：Ⅰ、锁变弹性区；Ⅱ、锁变塑性区；Ⅲ、无应力区或自由区。见图5-2。

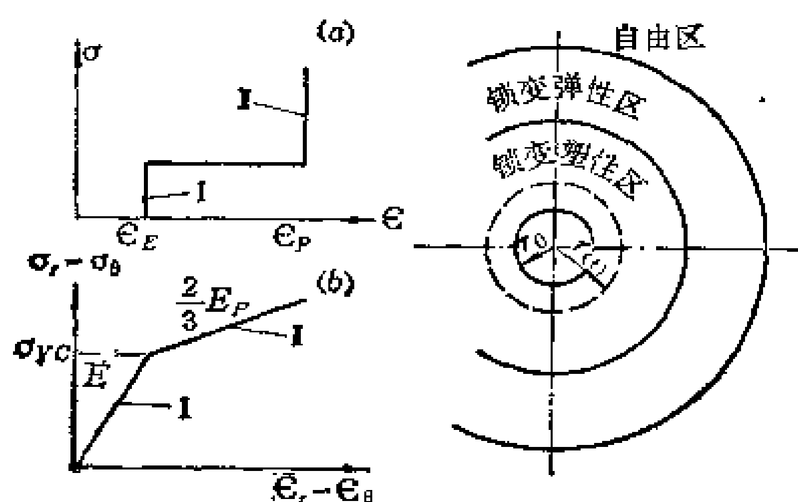


图5-2 空穴膨胀理论的分区和锁变情况

（a）体积变形；（b）剪应变。

（2）在锁变弹性区中，应力应变满足弹性关系，但体积膨胀应变 ϵ 为一常量 ϵ_E。

（3）在锁变塑性区中，应力应变满足理想的强化塑性本构关系，但体积膨胀应变 ϵ 为一常量 ϵ_P，且有 $|\epsilon_P|>|\epsilon_E|$。

（4）按动力理论计算，但在弹性区中密度不变，为 ρ_E；在塑性区中，密度也不变为 ρ_P。且 $\rho_P>\rho_E$。

（5）这两个区域都是球对称或轴对称的。

根据这个理论，在球形空穴膨胀中：

（1）在锁变弹性区内

$$\epsilon_{1r}+2\epsilon_{1\theta}=\epsilon_E \tag{5.12a}$$

$$\sigma_{1r}=\lambda\epsilon_E+2G\epsilon_{1r} \tag{5.12b}$$

$$\sigma_{1\theta}=\lambda\epsilon_E+2G\epsilon_{1\theta} \tag{5.12c}$$

（2）在锁变塑性区内

$$\epsilon_{2r}+2\epsilon_{2\theta}=\epsilon_P \tag{5.13a}$$

$$\sigma_{2\theta}-\sigma_{2r}=\sigma_{YC}+\frac{2}{3}E_P(\epsilon_{2\theta}-\epsilon_{2r})-\frac{1}{3}E_P\frac{\sigma_{YC}}{G} \tag{5.13b}$$

$$2\sigma_{2\theta}+\sigma_{2r}=(3\lambda+2G)\epsilon_P \tag{5.13c}$$

其中 λ、G 为拉梅常数，ϵ_E、ϵ_P 分别为弹性区和塑性区的体积变形常数。

斯坦福大学的古地尔（J. N. Goodier 1964）[5-13]把这个理论用之于土壤靶体材料，指出可以近似地用以研究球形弹侵入半无限体的问题。此后，斯坦福大学的哈那古（S. Hanagud）和卢丝（B. Ross）在1969～1976年间发表了一系列工作结果[5-14,5-15,5-16,5-17,5-18,5-19]，有的考虑了可压缩问题，有的专门针对土壤和混凝土的问题，但一直到目前，尚有不少问题没有解决。

正确求解，尚应有介质膨胀的运动方程、应变位移关系式，以及在弹塑性区交界处的质量和能量守恒条件。

我们将不再详细推导其分析过程，关于这一方面，读者可以参阅毕学柏[5-12]、古地尔[5-13]或哈那古和卢丝[5-16]的文章。

其结果如下：

（1）球形弹体所受压力，分为静压 p^s 和动压 p^D 两部份

$$p^{f}=\frac{4}{9}E_{P}(1-e^{-A_1})-\frac{2}{3}\sigma_{YC}\ln(1-e^{-A_1})+\frac{2}{27}\pi^{2}E_{P}-\frac{4}{9}E_{P}A_{1} \tag{5.14 a}$$

$$p^{D}=\rho_{P}(B_{1}r\ddot{r}+B_{2}\dot{r}^{2}) \tag{5.14 b}$$

式中

r ——欧拉径向坐标；

ρ_E——弹性锁变密度；

ρ_P——塑性锁变密度；

$$A_{1}=3\frac{\rho_{E}}{\rho_{P}}\left(\frac{\sigma_{SY}}{6G}-\frac{\epsilon_{E}}{3}\right) \tag{5.15}$$

ϵ_E——弹性锁变体积变形；

E_P——线性强化塑性域的切变模量。

还有 B_1、B_2 为

$$B_{1}=1-(1-e^{-A_1})^{1/3} \tag{5.16 a}$$

$$B_{2}=\frac{3}{2}-\left(2-\frac{\rho_{E}}{\rho_{P}}\right)(1-e^{-A_1})^{1/3}+\frac{1}{2}(1-e^{-A_1})^{4/3} \tag{5.16 b}$$

（2）侵入深度P的近似计算

我们应该注意到球形空穴膨胀的运动和球形弹体向前侵入的运动是根本不同的。球面膨胀的速度 $\dot{r}$ 和加速度 $\ddot{r}$ 都和球面垂直，而且在球面上都是均布的。所以动力压强在球面上都等于 p^D，这个压强在向前的半球面上的合力为（图 5-3）

$$f^{D}=\int_{0}^{\pi/2}2\pi r_{0}\sin\theta\cdot p^{D}\cos\theta\cdot r_{0}d\theta=\pi r_{0}^{2}p^{D} \tag{5.17}$$

但对于侵入的运动弹体而言，球面上各点的运动都不垂直于球面。因此，球面上各点的动力压强也不可能是均布的古地尔假定它是按 $\cos\theta$ 规律分布的，其最大值在球面的顶点。也即是说各点的动力压强为 $p_*^D\cos\theta$，其中 p_*^D 为球面顶点的值，这个值以 $r=z$，$\dot{r}=\dot{z}$，$\ddot{r}=\ddot{z}$ 代替（5.14 b）式，得

$$p_{*}^{D}=\rho_{P}(B_{1}z\ddot{z}+B_{2}\dot{z}^{2}) \tag{5.18}$$

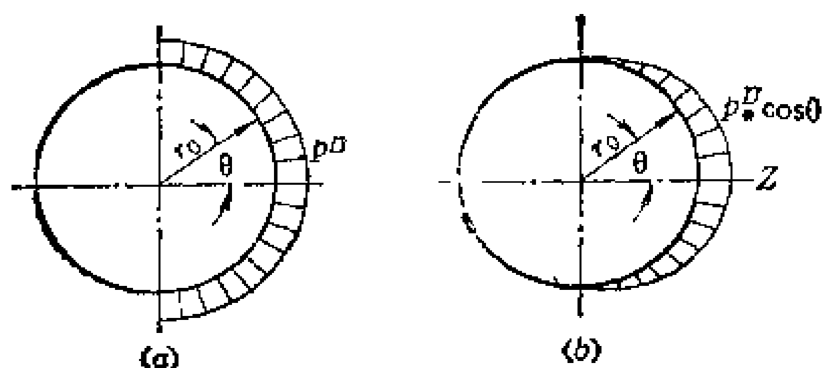


图5-3　膨胀空穴和侵入球体的压强分布

（a）膨胀空穴的压强分布；（b）侵入球体的压强分布。

其中 z 为沿侵入方面延长的直线坐标。

于是，有关的阻力为

$$f_*^D=\int_0^{\pi/2} 2\pi r_0\sin\theta\ p_*^D\cos\theta\cos\theta r_0 d\theta=\frac{2}{3}\pi r_0^2 p_*^D$$

$$=\frac{2}{3}\pi r_0^2\rho_P(B_1 z\ddot{z}+B_2\dot{z}^2) \tag{5.19}$$

对于静压 p^s 而言，两者没有不同，它的合力为

$$f^s=\pi r_0^2 p^s \tag{5.20}$$

于是，球形弹体的运动方程可以写成

$$-m\ddot{z}=f^s+f_*^D=\left\{p^s+\frac{2}{3}\rho_P(B_1 z\ddot{z}+B_2\dot{z}^2)\right\}\pi r_0^2 \tag{5.21}$$

其中 m 为弹体质量。

这是一个非线性方程，为了使其易于积分，古地尔进一步引进近似，把 $z\ddot{z}$ 改写为 $r_0\ddot{z}$，把 $\dot{z}^2$ 改写为 $v_0\dot{z}$，于是（5.21）变成线性微分方程：

$$-m\ddot{z}=\left\{p^s+\frac{2}{3}\rho_P(B_1\ddot{z}r_0+B_2 v_0\dot{z})\right\}\pi r_0^2 \tag{5.22}$$

其积分条件为

$$t=0,\quad z=r_0,\quad \dot{z}=v_0 \tag{5.23}$$

（5.22）式可以写成

$$\ddot{z}+\lambda\dot{z}=-Q \tag{5.24}$$

其中

$$\lambda = \frac{\frac{2}{3}\rho_p B_2 v_0}{\frac{m}{\pi r_0^2} + \frac{2}{3}\rho_p B_1 r_0}, \quad Q = \frac{p^c}{\frac{m}{\pi r_0^2} + \frac{2}{3}\rho_p B_1 r_0}$$

(5.25)

满足起始条件（5.23）的解为

$$\dot{z} = \left(v_0 + \frac{Q}{\lambda}\right)e^{-\lambda t} - \frac{Q}{\lambda} \quad (5.26\text{a})$$

$$z = \frac{1}{\lambda}\left(v_0 + \frac{Q}{\lambda}\right)(1 - e^{-\lambda t}) - \frac{Q}{\lambda}t + r_0 \quad (5.26\text{b})$$

求侵入深度P的条件为$\dot{z} = 0$，

$$\left(v_0 + \frac{Q}{\lambda}\right)e^{-\lambda t_*} - \frac{Q}{\lambda} = 0,$$

$$t_* = \frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{v_0 + \frac{Q}{\lambda}}{\frac{Q}{\lambda}}\right\} \quad (5.27)$$

代入（5.26 b）式，即得侵入深度

$$P = \frac{v_0}{\lambda} - \frac{Q}{\lambda^2}\ln\left\{\frac{v_0 + \frac{Q}{\lambda}}{\frac{Q}{\lambda}}\right\} + r_0 \quad (5.28)$$

把（5.25）代入上式，简化后得

$$P = r_0 + \frac{3}{2}\left\{\frac{\frac{m}{\pi r_0^2} + \frac{2}{3}\rho_p B_1 r_0}{\rho_p B_2}\right\} \cdot \left\{1 - \frac{3p^c}{2\rho_p v_0^2 B_2}\ln\left[1 + \frac{2}{3}\rho_p B_2 v_0^2 / p^c\right]\right\} \quad (5.29)$$

其实，（5.21）式是可以精确积分的，其法如下，把$\ddot{z}$写成

$$\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{d\dot{z}^2}{dz}$$

(5.30)

把（5.30）代入（5.21），并简化，其结果可以写成

$$\frac{d\dot{z}^2}{\left[p^s+\frac{2}{3}\rho_p B_2 \dot{z}^2\right]} = -\frac{2dz}{\left[\frac{m}{\pi r_0^2}+\frac{2}{3}B_1\rho_p z\right]} \tag{5.31}$$

满足初始条件（5.23）的解为

$$\left[p^s+\frac{2}{3}\rho_p B_2 \dot{z}^2\right]^{\frac{B_1}{2B_2}}\left[\frac{m}{\pi r_0^2}+\frac{2}{3}B_1\rho_p z\right]$$

$$=\left[p^s+\frac{2}{3}\rho_p B_2 v_0^2\right]^{\frac{B_1}{2B_2}}\left[\frac{m}{\pi r_0^3}+\frac{2}{3}B_1\rho_p r_0\right] \tag{5.32}$$

侵入深度的条件为

$$\dot{z}=0,\quad z=P \tag{5.33}$$

把它代入（5.32）后可得侵入深度P

$$P=\left[r_0+\frac{3m}{2\pi B_1\rho_p r_0^2}\right]\left[1+\frac{2}{3}\rho_p B_2\frac{v_0^2}{p^s}\right]^{B_1/2B_2}-\frac{3m}{2\pi B_1\rho_p r_0^2} \tag{5.34}$$

这是（5.21）的精确解，如果把（5.29）和（5.34）相比较，则可以看到，当

$$\frac{2}{3}\rho_p B_2\frac{v_0^2}{p^s}\ll 1 \tag{5.35}$$

时，略去高次项，则（5.29）、（5.34）都可以近似地写成

$$\frac{P}{r_0}\approx\left[1+\frac{3m}{2\pi B_1\rho_p r_0^3}\right]\left[1+\frac{1}{3}\rho_p B_1\frac{v_0^2}{p^s}\right]-\frac{3m}{2\pi B_1\rho_p r_0^2} \tag{5.36}$$

（3）伯纳（R. S. Bernard）、哈那古（S. V. Hanagud）和克勒顿（D. C. Creighton）[6-18,6-19] 的可压缩性修正理论（1975～1976）。

美国密西西比工程兵河道实验站的伯纳、哈那古和克勒顿曾考虑了空穴膨胀理论的可压缩性修正问题。他们也研究了弹体在泥土中受到的轴向力问题。他们认为轴向力一部分来源于径向应力 σ_r，另一部分来自剪应力 $\sigma_{r\theta}$。所以，弹体的运动方程为

$$-m\frac{dv}{dt}=\pi r_0^2\left(\sigma_r+\frac{\pi}{2}\sigma_s\right) \tag{5.37}$$

其中$\frac{\pi}{2}$ 这个系数来自 σ_s 的有效轴向分量 $\sigma_s\sin\theta$ 在球面上的积分，亦即

$$j_s=\int_0^{2\pi} 2\pi r_0\sin\theta\cdot\sigma_s\sin\theta\cdot rd\theta=\frac{1}{2}\pi^2 r_0^2\sigma_s \tag{5.38}$$

对于不同弹头，σ_r，σ_s 分别为

$$\sigma_r=(1+\alpha+\sqrt{\psi})\sigma_{r(ae)} \tag{5.39 a}$$

$$\sigma_s=(1+\alpha)e^{-\psi}\sigma_{\theta(ae)} \tag{5.39 b}$$

其中 $\sigma_{r(ae)}$、$\sigma_{\theta(ae)}$ 为空穴膨胀理论（考虑压缩性的）的 σ_r 和 σ_θ；α 为弹头形状的修正系数；ψ 为彼斯脱数（Best Number）。

对于锥形弹性而言

$$\alpha=\left(\frac{L_N^2}{r_0^2}+1\right)^{1/2} \tag{5.40 a}$$

对于卵形弹头而言

$$\alpha=\frac{\dfrac{2L}{r_0}}{\dfrac{L_N^2}{r_0^2}+1} \tag{5.40 b}$$

其中 L 为弹体总长；L_N 为弹头长；r_0 为弹体半径。

彼斯脱数 ψ 为

$$\psi=\frac{\rho v^2}{\sigma_{r(ae)}} \tag{5.41}$$

根据可压缩性的空穴膨胀理论，$\sigma_{r(ae)}$、$\sigma_{\theta(ae)}$ 为

$$\sigma_{r(ae)}=\frac{3(1+\sin\zeta_F)}{3-\sin\zeta_F}(p+\alpha_{(ah)}\cot\zeta_F)I^k-\alpha_{(ah)}\cot\zeta_F \tag{5.42 a}$$

$$\sigma_{s(ae)}=\alpha_{(ah)}+\alpha_{(ah)}\tan\zeta_F \tag{5.42 b}$$

$$k=\frac{4\sin\zeta_F}{3(1+\sin\zeta_F)} \tag{5.42 c}$$

其中　$\alpha_{(ch)}$＝亲和应力　(5.43 a)

ζ_F＝内摩阻角　(5.43 b)

I＝刚性标数　(5.43 c)

文献〔5-19〕提供了有关几种土壤的上述三种数据，文献〔5-18〕有更多对这些有关物质材料性能的描述。见表5-2。

表5-2　有关材料性能数据（各种土壤）[5-19]

土　　壤	ρ (克/厘米^3)	$\alpha_{(ch)}$ (Pa)	ζ_F (度)	I
粘　　土	2.8	0.419×10^5	41	13
石膏土沉积	1.92	2.78×10^5	46	60
透明石膏土沉积	1.94	2.37×10^5	42	60
粘土多的淤泥	1.54	1.15×10^5	33.4	25～135

§5.4　数值计算

用于半无限体侵入计算的程序很多。第一、它们是轴对称问题的计算，是二维的；第二、它们都是大变形理论；第三、它们按靶体材料特性而取用各种各样的本构关系。例如，对于土壤这类材料，有人用[5-21]普朗特鲁斯的本构关系，这样的程序叫做WAVE-L[5-22]和PISCES-DL2[5-23]。也有人用所谓帽型本构关系[5-24,5-25]，采用这种本构关系的程序，叫做TOODY[5-26,5-27]，它采用拉格朗日坐标。帽型本构关系采用八面剪切应力和压强两个屈服面。

所有计算结果都指出，当刚性的弹头嵌埋进土壤中以后，侵入过程是一种平稳的运动过程，而在侵入土壤初期的过渡过程，虽是数值计算最有效的部分，但只用很短时间就过去了。土壤在弹体侵入时所受干扰的波及面范围很小，只在弹头分开土壤处一、二个弹体直径那样大的小区域，图5-4是弹体在稳定运动以后的网格变形[5-28]，它是根据TOODY程序计算所得的结果。

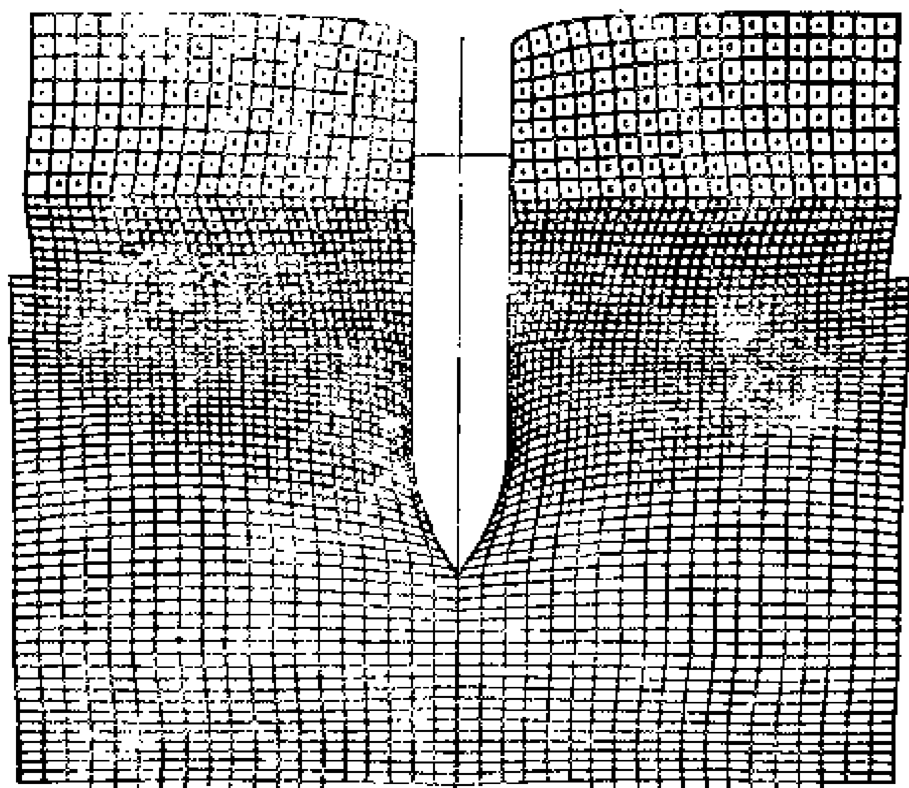


图5-4 弹体在6.8米深时的网格变形

弹体尺寸：长1.55米，直径0.155米；弹体重：25千克，

撞击速度 152米/秒。

弹体在侵入土壤介质时，变形很小，所以人们经常把它看作是刚性的。由于土壤介质的阻力不大，所以弹体的轨迹线长度经常能达到弹体直径的几百倍。但是，如果人们要求得侵入土壤开始阶段的情况，则网格尺寸应该只有弹头的几十分之一，为了得到平稳的计算结果，时间的步长也应该分得较小。所以计算工作量是很大的。如果要求考虑弹性变形，网格将要求分得更细。

§5.5 EPIC程序的基础(拉格朗日坐标)

本程序是汉奈威尔（Honeywill）公司国防系统研究组约翰逊（G. R. Johnson，1976）[5-26]所发展的。这个程序采用了拉格朗日坐标和（三角形）有限元法，容许有复杂的边界条件和几何形状，容许有大位移变形的弹塑性本构关系。本法的计算步骤如下：

（1）把轴对称问题的（z，r）平面分为若干个三角形有限元（从空间和整体角度看是截面为三角形的圆环，因此实际上是三角形截面的环形有限元），容许各有限元有不同的材料特性。

（2）假定质量是平均分配在三个角点上，并把质量集中于结点上，而且在结点上给出初始速度作为撞击速度。

（3）开始数值积分的循环计算：

（甲）决定元素的应变和应变速度；

（乙）决定元素的应力，包括弹性应力、塑性应力偏量、流体静压和人为粘度；

（丙）决定作用在结点质量上的等效集中力；

（丁）决定积分用的时间步长；

（戊）在结点的运动方程中使用时间增量进行积分。

（4）重复循环计算，一直到获得预期结果为止。

典型三角形有限元如图5-5。用 i，j，m 标定结点，在初始时，结点的坐标为 r_{oi}，r_{oj}，r_{om} 和 z_{oi}，z_{oj}，z_{om}，变形后的各结点的坐标为 r_i，r_j，r_m 和 z_i，z_j，z_m。各结点的径向位移为 $u_i=r_i-r_{oi}$，轴向位移为 $v_i=z_i-z_{oi}$。

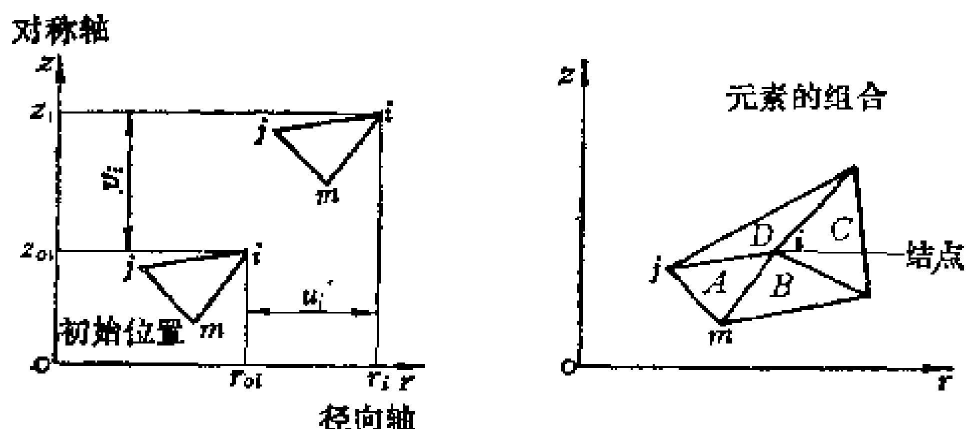


图5-5　三角形有限元的几何特性

把三角形截面的环形有限元的质量均分地集中在三个结点，即

$$M_i=M_j=M_m=\frac{1}{3}V_0\rho_0=\frac{2}{3}\pi r_0A_0\rho_0 \qquad (5.44)$$

其中 V_0、A_0、ρ_0 分别为三角形截面环形有限元的初始体积、初始截面和初始密度。$\bar{r}_0$ 为三角形形心的初始径向坐标。在各元素组合后，i 结点上的总质量，应该是所有以 i 点为邻接点的有限元在这点上的质量的总和。例如，i 点是图 5-5 中 A、B、C、D 诸有限元的共有结点，其总质量应该是这四个有限元在这点的分质量的总和，用 ΣM_i 表示。

在决定应变和应变速度时，我们将假定有限元的位移 u、v 是 r、z 的线性函数。即在有限元内

$$u=\alpha_1+\alpha_2 r+\alpha_3 z,\quad v=\alpha_4+\alpha_5 r+\alpha_6 z \tag{5.45}$$

α_1，α_2，$\alpha_3\cdots\alpha_6$ 为常数，它们是由有限元的结点初始坐标和它们的位移决定的。

把 r_{oi}、z_{oi}、u_i；r_{oj}、z_{oj}、u_j 以及 r_{om}、z_{om}、u_m 代入（5.45）第一式，即得决定 α_1，α_2，α_3 的三个联立方程式。同样也可以用这三个结点的 r_0、z_0、v 值决定 α_4，α_5，α_6。其结果为

$$u=\frac{1}{2A_0}\{(a_{oi}+b_{oi}r+c_{oi}z)u_i+(a_{oj}+b_{oj}r+c_{oj}z)u_j+(a_{om}+b_{om}r+c_{om}z)u_m\} \tag{5.46 a}$$

$$v=\frac{1}{2A_0}\{(a_{oi}+b_{oi}r+c_{oi}z)v_i+(a_{oj}+b_{oj}r+c_{oj}z)v_j+(a_{om}+b_{om}r+c_{om}z)v_m\} \tag{5.46 b}$$

其中

$$a_{oi}=r_{oj}z_{om}-r_{om}z_{oj},\quad b_{oi}=z_{oj}-z_{om},\quad c_{oi}=r_{om}-r_{oj} \tag{5.47}$$

其它常数 a_{oj}、b_{oj}、c_{oj}；a_{om}、b_{om}、c_{om} 可以从（5.47）式把 i，j，m 轮换得到。

相当于初始坐标方向的应变分量（见第二章）为

$$\epsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \tag{5.48 a}$$

$$\epsilon_z=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \tag{5.48 b}$$

$$\epsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{5.48 c}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\bar{u}}{\bar{r}_0} \tag{5.48d}$$

$$\epsilon_v = \frac{V}{V_0} - 1 \tag{5.48e}$$

我们可以看到，在每一有限元内，$\frac{\partial u}{\partial r}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$、$\frac{\partial v}{\partial r}$、$\frac{\partial v}{\partial z}$都是常数，所以 ϵ_{rr}、ϵ_{zz}、ϵ_{rz} 在每一有限元内，也都是常数。如果 ϵ_θ 用$\frac{u}{r_0}$表示，就不是常数，它是 r、z 的线性函数。为了使 ϵ_θ 和 ϵ_r、ϵ_z、ϵ_{rz} 一致，我们取（5.48d）的表达式，其中 $\bar{r}_0$为三角形有限元的形心的初始径向坐标；同样 $\bar{u}$ 为平均径向位移，从(5.46)式，它是

$$\bar{u} = \frac{1}{2A_0}\{(a_{oi} + b_{oi}\bar{r}_0 + c_{oi}\bar{z}_0)u_i + (a_{oj} + b_{oj}\bar{r}_0 + c_{oj}\bar{z}_0)u_j + (a_{om} + b_{om}\bar{r}_0 + c_{om}\bar{z}_0)u_m\} \tag{5.49}$$

其中（$\bar{r}_0$，$\bar{z}_0$）为三角形有限元的起始形心坐标。

（5.48e）中的V/V_0为变形后和变形前的体积比。ϵ_v 为体积应变。

在这些基础上，我们要计算等效应变 $\bar{\epsilon}$，它是

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\{(\epsilon_r - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_\theta)^2 + 6\epsilon_{rz}^2\}} \tag{5.50}$$

它是元素发生畸变时的总应变，在塑性流动中考虑应变硬化时是有用的。可以看到，它在每一个三角形截面环形有限元中，是不随坐标变化的一个常数。

根据上面的讨论，我们有

$$\epsilon_r = \frac{1}{2A_0}[b_{oi}u_i + b_{oj}u_j + b_{om}u_m] + \frac{1}{8A_0^2}\{(b_{oi}u_i + b_{oj}u_j + b_{om}u_m)^2 + (c_{oi}u_i + c_{oj}u_j + c_{om}u_m)^2\} \tag{5.51a}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{2A_0}[c_{oi}v_i + c_{oj}v_j + c_{om}v_m]$$
$$+\frac{1}{8A_0^2}\{(c_{oi}v_i + c_{oj}v_j + c_{om}v_m)^2 + (b_{oi}v_i + b_{oj}v_j + b_{om}v_m)^2\}$$
$$(5.51\text{b})$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{4A_0}[c_{oi}u_i + c_{oj}u_j + c_{om}u_m + b_{oi}v_i + b_{oj}v_j + b_{om}v_m]$$
$$+\frac{1}{8A_0^2}\{(b_{oi}u_i + b_{oj}u_j + b_{om}u_m)(b_{oi}v_i + b_{oj}v_j + b_{om}v_m)$$
$$+(c_{oi}u_i + c_{oj}u_j + c_{om}u_m)(c_{oi}v_i + c_{oj}v_j + c_{om}v_m)\} \quad (5.51\text{c})$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{2\bar{r}_0A_0}\{(a_{oi} + b_{oi}\bar{r}_0 + c_{oi}\bar{z}_0)u_i + (a_{oj} + b_{oj}\bar{r}_0 + c_{oj}\bar{z}_0)u_j$$
$$+(a_{om} + b_{om}\bar{r}_0 + c_{om}\bar{z}_0)u_m\} \quad (5.51\text{d})$$

应变速度分量 $\dot{\epsilon}_r$，$\dot{\epsilon}_z$，$\dot{\epsilon}_{rz}$，$\dot{\epsilon}_\theta$ 的计算方法和应变分量的离散化方法相同，除了（1）把位移速度 $\dot{u}$ 和 $\dot{v}$ 代替位移 u 和 v；(2) 由位移速度的结点值 $\dot{u}_i$，$\dot{v}_i$，$\dot{u}_j$，$\dot{v}_j$，$\dot{u}_m$，$\dot{v}_m$ 代替位移的结点值 u_i，v_i，u_j，v_j，u_m，v_m；（3）把应变速度 $\dot{\epsilon}_r$，$\dot{\epsilon}_z$，$\dot{\epsilon}_{rz}$，$\dot{\epsilon}_\theta$ 代替应变 ϵ_r，ϵ_z，ϵ_{rz}，ϵ_θ 外，无须在应变速度和位移速度式中保留非线性项。而且我们还必须指出，对应变速度的描写，都是在变形后的坐标中进行的，所以，不必化回初始坐标的系统中去。

于是，相当于(5.46)，我们有

$$\dot{u} = \frac{1}{2A}\{(a_i + b_ir + c_iz)\dot{u}_i + (a_j + b_jr + c_jz)\dot{u}_j$$
$$+(a_m + b_mr + c_mz)\dot{u}_m\} \quad (5.52\text{a})$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2A}\{(a_i + b_ir + c_iz)\dot{v}_i + (a_j + b_jr + c_jz)\dot{v}_j$$
$$+(a_m + b_mr + c_mz)\dot{v}_m\} \quad (5.52\text{b})$$

其中

$$a_i = r_jz_m - r_mz_j, \quad b_i = z_j - z_m, \quad c_i = r_m - r_j \quad (5.53)$$

应变速度和位移速度之间的关系为

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = \frac{1}{2A}(b_i\dot{u}_i + b_j\dot{u}_j + b_m\dot{u}_m) \quad (5.54\text{a})$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} = \frac{1}{2A}(c_i\dot{v}_i + c_j\dot{v}_j + c_m\dot{v}_m) \tag{5.54 b}$$

$$\dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial r}\right) = \frac{1}{4A}(c_i\dot{u}_i + c_j\dot{u}_j + c_m\dot{u}_m + b_i\dot{v}_i + b_j\dot{v}_j + b_m\dot{v}_m) \tag{5.54 c}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{\bar{\dot{u}}}{\bar{r}} = \frac{1}{2A\bar{r}}\{(a_i + b_i\bar{r} + c_i\bar{z})\dot{u}_i + (a_j + b_j\bar{r} + c_j\bar{z})\dot{u}_j + (a_m + b_m\bar{r} + c_m\bar{z})\dot{u}_m\} \tag{5.54 d}$$

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\dot{V}}{V_0} \tag{5.54 e}$$

等效的应变速度为

$$\bar{\dot{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{9}[(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + (\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + 6\dot{\epsilon}_{rz}^2]} \tag{5.55}$$

所有这些应变速度分量在每一个三角形有限元中都是常数。

现在让我们计算各有限元中的弹性应力、应力偏量和塑性应力。不论在弹性应力和塑性应力中，为了消除局部应力的振荡，都增设了人为粘度。这种局部振荡都是由于把质量集中在结点上所引起的。

在弹性范围的，弹性应力根据虎克定律应该是

$$\sigma_r = \lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_r - Q \tag{5.56 a}$$

$$\sigma_z = \lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_z - Q \tag{5.56 b}$$

$$\sigma_\theta = \lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_\theta - Q \tag{5.56 c}$$

$$\sigma_{rz} = 2G\epsilon_{rz} \tag{5.56 d}$$

其中 λ、G 为拉梅弹性常数；Q 为人为粘度，它分为 $\dot{\epsilon}_v$ 的线性部分和二次项部分，只有当体积应变速度小于零时才使用[6-30]。

$$\left.\begin{aligned} &Q = C_L\sqrt{(\lambda + 2G)\rho A}\,|\dot{\epsilon}_v| + C_0^2\rho A|\dot{\epsilon}_v|^2 && \dot{\epsilon}_v < 0 \\ &Q = 0 && \dot{\epsilon}_v > 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.57}$$

其中，根据维京斯（M. L. Wilkins, 1964）[6-30]的建议

$$C_L=0.5,\quad C_0^2=4.0 \tag{5.58}$$

等效应力为

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_r)^2+6\sigma_{rz}\right]} \tag{5.59}$$

在弹性和塑性范围内

$$\left.\begin{array}{ll}\bar{\sigma}<\sigma_{YC} & \text{弹性范围}\\ \bar{\sigma}\approx\sigma_{YC} & \text{屈服}\\ \bar{\sigma}>\sigma_{YC} & \text{塑性范围}\end{array}\right\} \tag{5.60}$$

在塑性范围内，应力分量是由应力偏量s_r、s_z、s_θ、流体静压P和人为粘度Q所组成。

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_r=s_r-(P+Q)\\ \sigma_z=s_z-(P+Q)\\ \sigma_\theta=s_\theta-(P+Q)\\ \sigma_{rz}=s_{rz}\end{array}\right\} \tag{5.61}$$

塑性应力偏量代表材料所受的剪力状态。它和应变速度偏量$\dot{e}_r$，$\dot{e}_z$，$\dot{e}_\theta$，$\dot{e}_{rz}$的关系根据冯密西斯增量理论为

$$\left.\begin{array}{l}s_r=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\dot{e}_r}{\dot{\bar{\epsilon}}}\right)\bar{\sigma}\\ s_z=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\dot{e}_z}{\dot{\bar{\epsilon}}}\right)\bar{\sigma}\\ s_\theta=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\dot{e}_\theta}{\dot{\bar{\epsilon}}}\right)\bar{\sigma}\\ \sigma_{rz}=s_{rz}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\dot{e}_{rz}}{\dot{\bar{\epsilon}}}\right)\bar{\sigma}\end{array}\right\} \tag{5.62}$$

一般说来，$\bar{\sigma}$在塑性流动后是$\bar{\epsilon}$的函数，而且它和加载的历史过

程有关，但在高速碰撞中，主要都是加载，很少有卸载的，所以在这种情况认为和加载过程无关，仍是一个很好的近似。(5.62)式中的应变速度偏量的定义是

$$\left.\begin{aligned}\dot{e}_r&=\dot{\epsilon}_r-\frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_r+\dot{\epsilon}_z+\dot{\epsilon}_\theta)\\\dot{e}_z&=\epsilon_z-\frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_r+\epsilon_z+\dot{\epsilon}_\theta)\\\dot{e}_\theta&=\epsilon_\theta-\frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_r+\dot{\epsilon}_z+\dot{\epsilon}_\theta)\\\dot{e}_{rz}&=\dot{\epsilon}_{rz}\end{aligned}\right\}\tag{5.63}$$

所以只要应变速度已知，应变速度偏量也是已知的。

$\bar{\sigma}$ 和 $\bar{\epsilon}$ 的关系可以写成（见图 5-6 *a*、*b*）

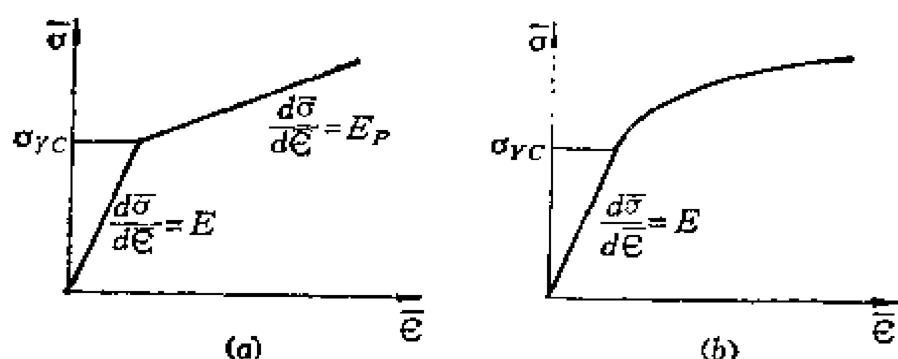


图5-6 塑性硬化材料的$\bar{\sigma}$、$\bar{\epsilon}$曲线

（*a*） 线性硬化；（*b*） 非线性硬化。

（a）线性硬化材料

$$\bar{\sigma}=\left(1-\frac{E_P}{E}\right)\sigma_{YC}+E_P\bar{\epsilon},\quad\left(\bar{\sigma}>\sigma_{YC}\text{或 }\bar{\epsilon}>\frac{\sigma_{YC}}{E}\right)\tag{5.64 a}$$

（b）非线性硬材料

$$\bar{\sigma}=\sigma_{YC}+f\left(\bar{\epsilon}-\frac{\sigma_{YC}}{E}\right),\quad\left(\bar{\sigma}>\sigma_{YC}\text{ 或 }\bar{\epsilon}>\frac{\sigma_{YC}}{E}\right)\tag{5.64 b}$$

流体静压 P 是由梅-葛留内逊（Mie-Gruneisen）的状态方程所决定的（见第二章）

$$P=(K_1\mu+K_2\mu^2+K_3\mu^3)\left(1-\frac{1}{2}\Gamma\mu\right)+\Gamma\rho I \qquad (5.65)$$

其中 K_1，K_2，K_3 为和材料有关的常数。

$$\mu=\frac{\rho}{\rho_0}-1=\frac{V_0}{V}-1 \qquad (5.66\,a)$$

$$\Gamma=\text{葛留内逊系数} \qquad (5.66\,b)$$

$$I=\text{比内能(每单位质量材料在变形中做的功)} \qquad (5.66\,c)$$

根据定义

$$\frac{d}{dt}(\rho I)=V\,[s_r\dot{E}_r+s_z\dot{\epsilon}_z+s_\theta\dot{\epsilon}_\theta+2\sigma_{rz}\dot{\epsilon}_{rz}]-(Q+P)\dot{V} \qquad (5.67)$$

现在让我们研究运动方程

$$\rho\ddot{u}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} \qquad (5.68\,a)$$

$$\rho\ddot{v}=\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r} \qquad (5.68\,b)$$

设在三角形有限元的结点上，有 σ_r、σ_z、σ_θ 和 σ_{rz} 的值 σ_{ri}、σ_{zi}、$\sigma_{\theta i}$、σ_{rzi}；σ_{rj}、σ_{zj}、$\sigma_{\theta j}$、σ_{rzj} 和 σ_{rm}、σ_{zm}、$\sigma_{\theta m}$、σ_{rzm}，于是，在这个有限元内，有

$$\sigma_r=\frac{1}{2A}\{(a_i+b_ir+c_iz)\sigma_{ri}+(a_j+b_jr+c_jz)\sigma_{rj}+(a_m+b_mr+c_mz)\sigma_{rm}\}$$

$$\sigma_z=\frac{1}{2A}\{(a_i+b_ir+c_iz)\sigma_{zi}+(a_j+b_jr+c_jz)\sigma_{zj}+(a_m+b_mr+c_mz)\sigma_{zm}\}$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2A}\{(a_i+b_ir+c_iz)\sigma_{\theta i}+(a_j+b_jr+c_jz)\sigma_{\theta j}+(a_m+b_mr+c_mz)\sigma_{\theta m}\}$$

$$\sigma_{rz}=\frac{1}{2A}\{(a_i+b_ir+c_iz)\sigma_{rzi}+(a_j+b_jr+c_jz)\sigma_{rzj}+(a_m+b_mr+c_mz)\sigma_{rzm}\} \qquad (5.69)$$

其中

$$a_i=r_jz_m-r_mz_j,\quad b_i=z_j-z_m,\quad c_i=r_m-r_j \tag{5.70}$$

我们注意到

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}=\frac{1}{2A}\{(b_i\sigma_{ri}+c_i\sigma_{rzi})+(b_j\sigma_{rj}+c_j\sigma_{rzj})$$
$$+(b_m\sigma_{rm}+c_m\sigma_{rzm})\} \tag{5.71}$$

它是和 r 、 z 无关的，所以是个常数，它相当于作用在三角形截面环形有限元上每单位体积的径向内力。如果我们取 $\bar{\sigma}_r$、$\bar{\sigma}_\theta$ 为有限元的 σ_r、σ_z 的平均值，$\bar{r}$ 为平均径向半径，即三角形有限元的形心的径向坐标，则（2.68a）式可以写为

$$\rho\ddot{u}=\frac{1}{2A}\{(b_i\sigma_{ri}+c_i\sigma_{rzi})+(b_j\sigma_{rj}+c_j\sigma_{rzj})+(b_m\sigma_{rm}+c_m\sigma_{rzm})\}$$
$$+\frac{1}{\bar{r}}(\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta)^1 \tag{5.72}$$

在（5.72）两边乘 $2\pi\bar{r}A$，得

$$2\pi\bar{r}\rho A\ddot{u}=\pi\bar{r}(b_i\sigma_{ri}+c_i\sigma_{rzi})+\frac{2}{3}\pi A(\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_3)$$
$$+\pi\bar{r}(b_j\sigma_{rj}+c_j\sigma_{rzj})+\frac{2}{3}\pi A(\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta)$$
$$+\pi\bar{r}(b_m\sigma_{rm}+c_m\sigma_{rzm})+\frac{2}{3}\pi A(\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta) \tag{5.73}$$

也可以写成

$$2\pi\bar{r}\rho A\ddot{u}=f_{ri}+f_{rj}+f_{rm} \tag{5.74}$$

其中 f_i、f_j、f_m 为作用在三角形三个角点上的等效力，它们是

$$\left.\begin{aligned}
f_{ri}&=\pi\bar{r}(b_i\sigma_{ri}+c_i\sigma_{rzi})+\frac{2}{3}\pi A(\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta)\\
f_{rj}&=\pi\bar{r}(b_j\sigma_{rj}+c_j\sigma_{rzj})+\frac{2}{3}\pi A(\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta)\\
f_{rm}&=\pi\bar{r}(b_m\sigma_{rm}+c_m\sigma_{rzm})+\frac{2}{3}\pi A(\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{5.75}$$

当然，我们如果从（5.46）出发计算应变和应变速度，然后计算应力分量，则三角形截面环形有限元中，任意点的应力分量都是常量，也即是说

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{ri}=\sigma_{rj}=\sigma_{rm}=\bar{\sigma}_r=\sigma_r\\
&\sigma_{zi}=\sigma_{zj}=\sigma_{zm}=\bar{\sigma}_z=\sigma_z\\
&\sigma_{\theta i}=\sigma_{\theta j}=\sigma_{\theta m}=\bar{\sigma}_\theta=\sigma_\theta\\
&\sigma_{rzi}=\sigma_{rzj}=\sigma_{rzm}=\bar{\sigma}_{rz}=\sigma_{rz}
\end{aligned}\right\}\tag{5.76}$$

而（5.75）可以写成

$$\left.\begin{aligned}
&f_{ri}=\pi\bar{r}(b_i\sigma_r+c_i\sigma_{rz})+\frac{2}{3}\pi A(\sigma_r-\sigma_\theta)\\
&f_{rj}=\pi\bar{r}(b_j\sigma_r+c_j\sigma_{rz})+\frac{2}{3}\pi A(\sigma_r-\sigma_\theta)\\
&f_{rm}=\pi\bar{r}(b_m\sigma_r+c_m\sigma_{rz})+\frac{2}{3}\pi A(\sigma_r-\sigma_\theta)
\end{aligned}\right\}\tag{5.77}$$

根据质量守恒定律

$$2\pi\bar{r}A\rho=V\rho=V_0\rho_0+2\pi\bar{r}_0A_0\rho_0\tag{5.78}$$

如果把质量平均分配给三个结点，则有惯性力

$$\begin{aligned}
2\pi\bar{r}\rho A\ddot{u}&=2\pi\bar{r}_0\rho_0A_0\ddot{u}=\frac{1}{3}2\pi\bar{r}_0\rho_0A_0(\ddot{u}_i+\ddot{u}_j+\ddot{u}_m)\\
&=M_i\ddot{u}_i+M_j\ddot{u}_j+M_m\ddot{u}_m
\end{aligned}\tag{5.79}$$

M_i、M_j、M_m 见（5.44）式，这样我们就用 f_{ri}、f_{rj}、f_{rm} 分别作用在结点 i、j、m 上来代替有限元内的分布内力。对于某一结点 i 为各有限元 A、B、C、D（图 5-5）所共有时，这个结点的加速度，可以写成

$$\ddot{u}_i=\frac{\sum f_{ri}}{\sum M_i}\tag{5.80}$$

同样，我们有

$$\ddot{v}=\frac{\sum f_{zi}}{\sum M_i}\tag{5.81}$$

其中

$$f_{zi}=\pi\bar{r}(b_i\sigma_{rz}+c_i\sigma_z)+\frac{2}{3}\pi A\sigma_{rz}\tag{5.82}$$

f_{zj}、f_{zm} 可以用类似的方程式写出。

现在设在时间 t 时，位移为 u_t，v_t，位移速度为 $\dot{u}_t$、$\dot{v}_t$，则在时间 $t+\Delta t$ 时，有

$$\left.\begin{aligned} u_{t+\Delta t} &= u_t + \dot{u}_t \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}_t \Delta t^2 \\ v_{t+\Delta t} &= v_t + \dot{v}_t \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{v}_t \Delta t^2 \\ \dot{u}_{t+\Delta t} &= \dot{u}_t + \ddot{u}_t \Delta t \\ \dot{v}_{t+\Delta t} &= \dot{v}_t + \ddot{v}_t \Delta t \end{aligned}\right\} \tag{5.83}$$

当然在计算中，我们应该利用下列关系

$$\left.\begin{aligned} V_{t+\Delta t} &= V_t + \dot{V}_t \Delta t \\ (\rho I)_{t+\Delta t} &= (\rho I)_t + \frac{d}{dt}(\rho I)_t \Delta t \end{aligned}\right\} \tag{5.84}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \dot{V} &= V_0 \dot{\epsilon}_v = V_0(\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_\theta) \\ \epsilon_v &= \frac{V}{V_0} - 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.85}$$

还有 A_0、A、$\bar{r}_0$、$\bar{r}$ 可以表示如下

$$A_0 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & r_{0i} & z_{0i} \\ 1 & r_{0j} & z_{0j} \\ 1 & r_{0m} & z_{0m} \end{vmatrix}, \quad A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix} \tag{5.86}$$

$$\bar{r}_0 = \frac{1}{3}(r_{0i} + r_{0j} + r_{0m}), \quad \bar{r} = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m) \tag{5.87}$$

现在让我们讲一讲怎样选择 Δt, Δt 受有两个限制。（1）Δt 必须小于系统中各种振动的最小周期。如果接近这个周期，就会和这个频率的振动模式发生共振，计算结果就不稳定。（2）Δt 必须小于弹性波从三角形的任一角点到达对边所需的时间。

对于第一个限制而言，约翰逊[5-29]指出，这样一个复杂的振动系统，有不少种模式的振动，但其最小周期应该属于基本三角形有限元的振动。如果我们求得这个元素的振动频率，这个最小

周期就求到了。约翰逊研究了一种等腰三角形有限元的振动，他把这个有限元的质量分配包干到三个角点，从而研究其振动周期。证明：只有当三角形高宽比 h/w 为 0.866 时，周期最大，对于 h/w 值较大和较小的三角形，其振动周期都较小。根据这个结果，我们取振动周期的 $\frac{1}{6}\sim\frac{1}{9}$ 时间作为 Δt，计算就稳定（图 5-7）。

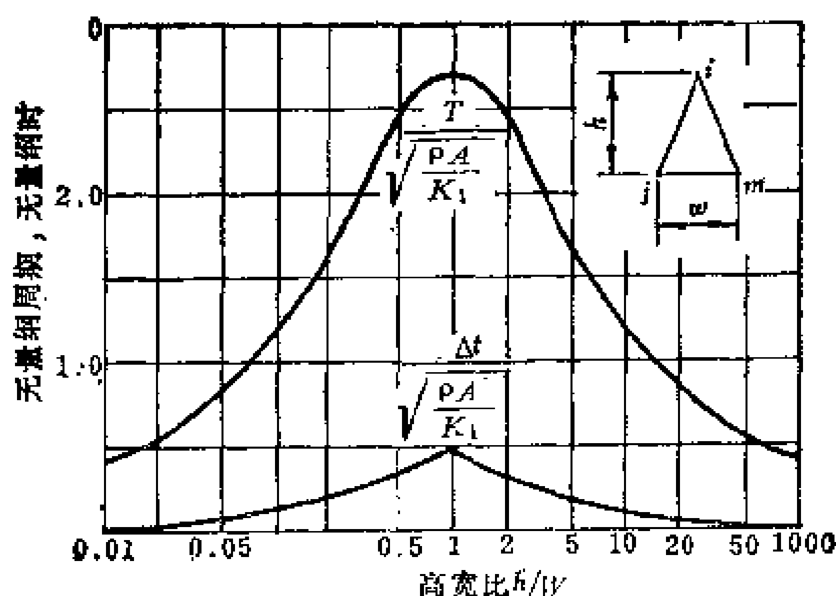


图5-7 三角形有限元的无量纲周期 $\left(\frac{T}{\sqrt{\frac{\rho A}{K_1}}}\right)$ 和无量纲时段 $\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{\frac{\rho A}{K_1}}}\right)$

ρ—密度；A—三角形面积；K_1—体积膨胀系数[5-29]。

华许[2-57]（1972）研究了第二个限制问题。设 Δx 为三角形的最小高度。c_l 为这种材料的声速。如果变形较慢，不用人为粘度阻尼，干扰通过 Δx 的时间应该是 $\Delta x/c_l$。如果我们取计算时段为这段时间的 $\frac{1}{3}$，就能得到稳定的计算，亦即

$$\Delta t=\frac{1}{3}\frac{\Delta x}{c_l} \tag{5.83}$$

变形太快的情况，时段就要取得更小，同时人为粘性阻尼也较大。华许指出时段 Δt 可以和人为粘度有下列关系

$$\Delta t = \frac{1}{3}\frac{\Delta x}{g+\sqrt{g^2+c_s^2}} \tag{5.89}$$

其中

$$g^2 = \frac{Q}{c_0^2\rho} \qquad [Q\text{见 (5.57)}] \tag{5.90}$$

$$c_s^2 = \frac{K_i}{\rho} \qquad [K_i\text{见 (5.65)}] \tag{5.91}$$

例如，约翰逊曾用一个有限元模型，计算了一个镍弹击铝靶的问题。撞击速度为 1500 米/秒。设有 400 个三角形，236 个结点。时段在开始时，用 0.020 微秒，紧接着，由于速度减慢，人为粘度降低，计算时段改为 0.035 微秒。在撞击后 4 微秒，变形比较明显，计算时段再缩短，改为 0.022 微秒。一直算到 8 微秒才结束，一共计算了 379 个循环，在 CDC6600 计算机上化费了 130 秒钟。

我们必须指出：约翰逊的 EPIC 程序在处理运动方程时，略去了一些不应该略去的项，如（5.77）式中 $\frac{2}{3}\pi A\sigma_r$，以及（5.82）式中 $\frac{2}{3}\pi A\sigma_{rz}$，这样其计算结果是不可信的。

§5.6 实验程序

土地的侵入体一般是装着炸药的炸弹。当炸弹爆炸时，一般是为了炸毁某一地下构造或大型靶体，或是为了在跑道、公路、或其它车辆行驶的路面上炸出一个巨大的弹坑。为此，炸弹的直径有的大到半米左右。除了在某些实验研究侵入半无限靶体时采用仅几厘米小的弹体外，大部分实验都是用全尺寸的弹体。人们曾研究过[5-10](1974)，这类小弹体实验的模型相似律，很不可靠，所以，用缩小尺寸进行的模型试验是无效的。全尺寸实弹试验费用很昂贵，即使仅为了测定侵入深度，就很不容易，须有重

型设备开掘地下弹路，或处理大型弹体。但用大型弹体是有好处的，我们可以在弹体内部按装测试仪器，用以测定弹体在侵入地下过程中各个阶段的加速度。

加速度计是装在弹体内部的，测试数据可以通过尾曳天线传到地面站遥测[5-6]，也可以把测量系统装在弹体内部，把侵入过程中测得的数据贮存起来，等候弹体完全停止后，再传到地面[5-28]。

图 5-8 是用 300 米/秒撞击某干盐湖的轴向减速度记录[5-28]。这种记录图可以用来分析地下不同地层对弹体提供的不同阻力。图 5-8 中就指出，在湖面下 3 ～ 6 米之间，减速度明显增大；有两层硬质地层存在，估计是盐质结晶层；从 6 米以后，减速度基本不变，证明有十余米的品质均匀的土层在盐晶下面填底。在实验曲线的后段，测得了突然升高的减速度。这是因为动摩擦系数比静摩擦系数小，当弹体速度降低到接近零时，动摩擦系数转变为静摩擦系数，所以减速度突然增加，一直到停止运动为止。

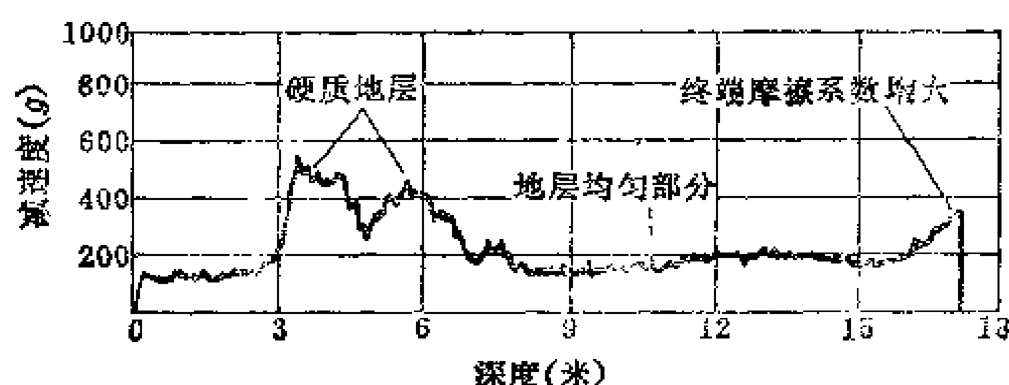


图5-8 弹体以 300米/秒撞击速度侵入干盐湖的轴向减速度记录图

最简单的加速度计是用硬质球体撞击板靶所得凹痕来测量的。这种工具可以在事先校核，它实际上用的是弹体最高速度(1976)[5-32]。这种测量也可以用来研究装药弹体所受到的损坏。一般说来，炸弹受损坏的区域都在弹壁厚度变化较大的部分。

实际在实验中，投掷弹体是一个大问题，目前国际上有四类发射和投掷弹体方法，即由飞机投掷、用火箭发射、用枪炮发射和专用起重投掷车辆来投掷。

人们用了直升飞机，喷气式战斗机，轰炸机或民用机进行过大量的投掷试验。这样所得的撞击速度约在 100～400 米/秒之间。这种投掷试验的优点是，弹体上可以按装供遥测的加速度计。其缺点是，不容易准确投到选定的靶址。如非有较大区域的土质一致性的靶址，用飞机投掷的方法常常得不到数据的一致性。

火箭发射可以得到 400～1000米/秒的撞击速度。对于一个 200 公斤的弹体而言，要达到这样高的撞击速度时，应采用二级火箭。本法的缺点是无法选择靶址，而且也不容易得到垂直于地面的正撞，25°斜角的撞击就算是较好的结果了。

枪炮发射法在野外试验中提供了最精确选择靶址的方法。但枪炮发射法对弹体的尺寸和重量限止较严。气枪可以发射重达 27 公斤的弹体达 150米/秒的速度。0.2 米口径的无后坐力炮可以使 350 公斤的弹体获得 800 米/秒的撞击速度。最初发展了一种专用的弹体发射器，叫做台维斯炮[6-36]，它是专用于地球动力学实验的发射器，它可以用各种角度发射。实际上，在最近十年来，它已经替代了空投实验。

第二章中所述轻气枪实验装置，也可以用来做侵入试验，它提供了大量的有价值的数据。

直接把弹头象火箭那样送入地下的火箭投掷器，曾把 135 公斤的弹体送达 2000米/秒的撞击速度，也可以把 1000 公斤的弹体送达 1000米/秒的速度[6-36]。火箭投掷器更多地用来进行反向的弹道试验，即推进靶体材料投向不动的弹体。用这种试验方法，特别容易研究弹体在撞击中的结构反应。

§5.7 斜角撞击的轨迹线的计算

前面讲的都是当弹体垂直正面撞击半无限体时的问题，这时，弹体是直线向下，它只经受轴向阻力。

人们也曾研究了斜向撞击的问题[5-34]。这时弹体除了经受轴向阻力外，还经受侧向推力，这个推力不一定通过弹体重心，从而对重心形成了一个转动力矩。这些侧向推力和转动力矩一般说来和弹体的飞行仰角和偏航角有关，当仰角和偏航角不大时，这些推力和转动力矩分别和仰角和偏航角成正比。

根据以上分析，人们就能计算斜击后弹体在地下的轨迹线和弹头的仰角和偏航角。把计算结果和实测结果相比较，证明计算是很合乎实际的。图 5.9 是文献〔5-34〕所用公式的计算曲线和实验曲线的比较。弹体直径 20 毫米，撞击速度为 980英尺/秒，撞击斜角为 30°。

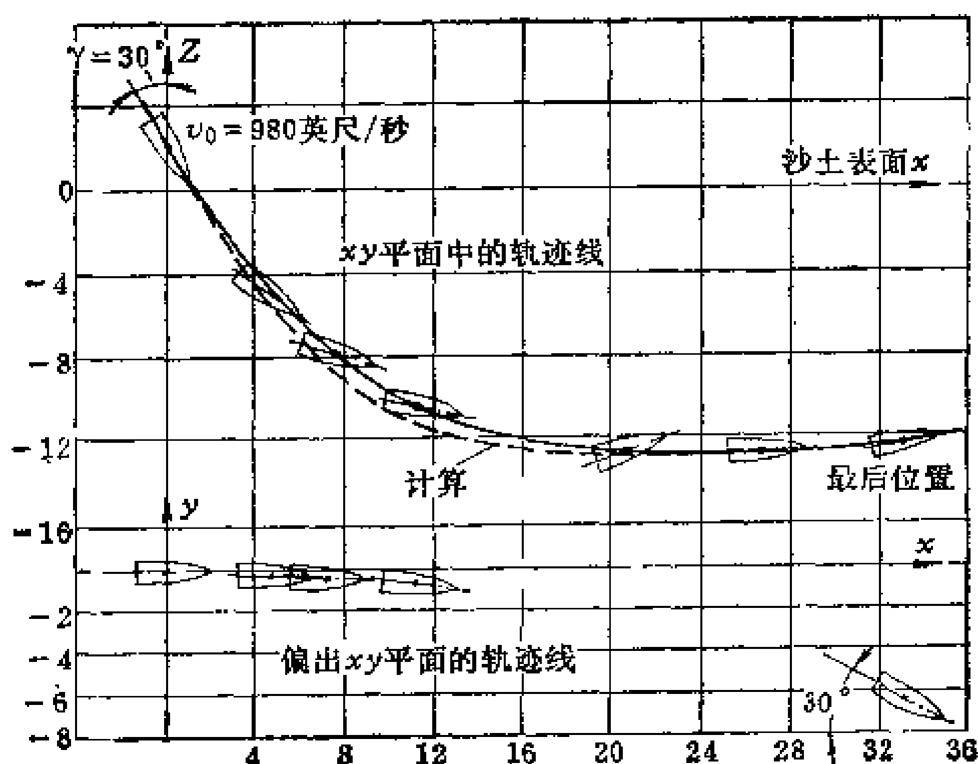


图5-9　20毫米弹体在沙土中的飞行轨迹线

让我们取下列坐标系（x，y，z），见图 5-10。速度 v 的分量为 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，有

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 \tag{5.91}$$

速度矢量的方向角为 α，β，γ，于是，有

图5-10　撞击后弹体的运动

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\dot{x}}{v} \\
\cos\beta &= \frac{\dot{y}}{v} \\
\cos\gamma &= \frac{\dot{z}}{v}
\end{aligned}
\right\} \tag{5.92}
$$

设弹体轴线方向角为 α_1，β_1，γ_1，于是弹轴 $\vec{A}$ 和速度 $\vec{v}$ 的夹角为 θ，而

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 \tag{5.93}$$

作用在运动弹体重心上的力有两种，一种是沿着 $\vec{v}$ 反方向的阻力 R，

$$
\begin{aligned}
R = {} & A\rho c_1 v e^{-a_1 t H(t-t_1)+a_2}(1+f) \\
& + c_n A_l \theta \frac{1}{2}\rho v^2 + c_t A \frac{1}{2}\rho v^2
\end{aligned} \tag{5.94}
$$

其中 a_1，a_2，c_n，c_t 和 f 代表材料性质的系数，A 为弹体的正截面面积，A_l 为弹体在通过弹轴的平面上的截面面积，θ 为弹体的攻角，见（5.93）。$A\rho c_1 v e^{-a_1 t H(t-t_1)}$ 代表激波阻力，$(1+f)$ 代表一种摩擦效果，$H(t-t_1)$ 为 Heaviside 阶跃函数。

$$
H(t-t_1) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ 1 & t > t_1 \end{cases} \tag{5.95}
$$

如果没有激波，则这一项 $e^{-a_1 t H(t-t_1)}$ 等于 1。

第二种力是弹轴 $\vec{A}$ 和 $\vec{v}$ 的共有平面内的举力 $\vec{L}$。它垂直于轨迹线，但作用在 $(\vec{A},\ \vec{v})$ 平面内。

$$L = Ac_L\theta\rho v^2 \tag{5.96}$$

因为举力作用点不一定通过重心。其效果等于作用于重心的举力和绕重心的一个力矩M

$$M = AC_Lh\theta\rho v^2 \tag{5.97}$$

其中 h 为举力作用点和重心之间在弹轴上的距离，作用点在重心之前为正。这个力矩的轴通过重心，垂直于 $(\vec{A},\ \vec{v})$ 平面。(5.96)、(5.97) 中的 C_L 称为举力系数。

于是，我们有下列运动方程

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2X}{dt^2} &= -R\cos\alpha + L\cos\alpha_2 \\ m\frac{d^2Y}{dt^2} &= -R\cos\beta + L\cos\beta_2 \\ m\frac{d^2Z}{dt^2} &= -R\cos\gamma + L\cos\gamma_2 \\ I\frac{\partial^2\theta}{dt^2} &= M \end{aligned}\right\} \tag{5.98}$$

其中 α_2，β_2，γ_2 为举力的矢量方向角。它垂直于 $\vec{v}$，而且在$(\vec{A},\ \vec{v})$ 的平面内（如图 5-10）。所以它由下面三式求解决定：

$$\cos\alpha_2\cos\alpha + \cos\beta_2\cos\beta + \cos\gamma_2\cos\gamma = 0 \tag{5.99 a}$$

$$\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \cos\beta_2\cos\beta_1 + \cos\gamma_2\cos\gamma_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \tag{5.99 b}$$

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1 \tag{5.99 c}$$

如果在 t 时，有 x_t、y_t、z_t、$\dot{x}_t$、$\dot{y}_t$、$\dot{z}_t$、$\cos\alpha_{1t}$、$\cos\beta_{1t}$、$\cos\gamma_{1t}$ 和 $\dot{\theta}_t$，于是从 (5.91) 计算 v_t；从(5.92)计算$\cos\alpha_t$、$\cos\beta_t$、$\cos\gamma_t$；从(5.93) 计算 θ_t；从 (5.99) 计算$\cos\alpha_{2t}$、$\cos\beta_{2t}$、$\cos\gamma_{2t}$；最后，从 (5.94)、(5.96)、(5.97) 计算 R_t、L_t、M_t。代入(5.98)，计算 $\ddot{x}_t$、$\ddot{y}_t$、$\ddot{z}_t$、$\ddot{\theta}_t$，我们用下列公式，计算 $t+\Delta t$ 时的 $\ddot{x}$、$\ddot{y}$、$\ddot{z}$、$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$，即

$$\dot{x}_{t+\Delta t}=\dot{x}_t+\ddot{x}_t\Delta t,\quad \dot{y}_{t+\Delta t}=\dot{y}_t-\ddot{y}_t\Delta t,\quad \dot{z}_{t+\Delta t}=\dot{z}_t+\ddot{z}_t\Delta t \tag{5.100}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{t+\Delta t}&=x_t+\dot{x}_t\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{x}_t\Delta t^2\\ y_{t+\Delta t}&=y_t+\dot{y}_t\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{y}_t\Delta t^2\\ z_{t+\Delta t}&=z_t+\dot{z}_t\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{z}_t\Delta t^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.101}$$

但计算 $\theta_{t+\Delta t}$、$\dot{\theta}_{t+\Delta t}$ 就比较复杂。因为这里的 θ_t 代表弹轴（α_{1t}，β_{1t}，γ_{1t}）和 v_t 的夹角，而 $\theta_{t+\Delta t}$ 应该是在 $t+\Delta t$ 时的弹轴（$\alpha_{1,t+\Delta t}$，$\beta_{1,t+\Delta t}$，$\gamma_{1,t+\Delta t}$）和 $\vec{v}_{t+\Delta t}$ 的夹角。

首先，我们称在 $t+\Delta t$ 时的弹轴方向（$\alpha_{1,t+\Delta t}$，$\beta_{1,t+\Delta t}$，$\gamma_{1,t+\Delta t}$）和 $\vec{v}_t(\alpha_t,\ \beta_t,\ \gamma_t)$ 之间的夹角为 $\theta^*_{t+\Delta t}$，于是，我们有

$$\theta^*_{t+\Delta t}=\theta_t+\dot{\theta}_t\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{\theta}_t(\Delta t)^2 \tag{5.102}$$

其中 $\ddot{\theta}_t=M_t/I$，而 $M_t=AC_th\theta_t\rho v_t^2$。

新的弹轴取向（$\alpha_{1,t+\Delta t}$，$\beta_{1,t+\Delta t}$，$\gamma_{1,t+\Delta t}$）由下式求解：

$$\cos^2\alpha_{1,t+\Delta t}+\cos^2\beta_{1,t+\Delta t}+\cos^2\gamma_{1,t+\Delta t}=1 \tag{5.103 a}$$

$$\cos\alpha_{1,t+\Delta t}\cos\alpha_t+\cos\beta_{1,t+\Delta t}\cos\beta_t+\cos\gamma_{1,t+\Delta t}\cos\gamma_t=\cos\theta^*_{t+\Delta t} \tag{5.103 b}$$

$$\cos\alpha_{1,t+\Delta t}\cos\alpha_{1t}+\cos\beta_{1,t+\Delta t}\cos\beta_{1t}+\cos\gamma_{1,t+\Delta t}\cos\gamma_{1t}=\cos(\theta^*_{t+\Delta t}-\theta_t) \tag{5.103 c}$$

而且，我们有 $t+\Delta t$ 的 $\dot{x}_{t+\Delta t}$、$\dot{y}_{t+\Delta t}$、$\dot{z}_{t+\Delta t}$，所以有

$$\cos\alpha_{t+\Delta t}=\frac{\dot{x}_{t+\Delta t}}{v_{t+\Delta t}},\quad \cos\beta_{t+\Delta t}=\frac{\dot{y}_{t+\Delta t}}{v_{t+\Delta t}},\quad \cos\gamma_{t+\Delta t}=\frac{\dot{z}_{t+\Delta t}}{v_{t+\Delta t}} \tag{5.104}$$

而 $\theta_{t+\Delta t}$（即新的弹轴取向和新的 $\vec{v}_{t+\Delta t}$ 之间的夹角）为

$$\cos\theta_{t+\Delta t}=\cos\alpha_{1,t+\Delta t}\cos\alpha_{t+\Delta t}+\cos\beta_{1,t+\Delta t}\cos\beta_{t+\Delta t}+\cos\gamma_{1,t+\Delta t}\cos\gamma_{t+\Delta t} \tag{5.105}$$

而 $\dot{\theta}_{t+\Delta t}$ 则为

$$\dot{\theta}_{t+\Delta t}=\frac{\theta_{t+\Delta t}-\theta_t}{\Delta t} \tag{5.106}$$

这样就完成了一个时段的计算。

参 考 文 献

〔5-1〕 G. Birkhoff, G. D. Birkhoff, W. E. Bleick, E. H. Handler, F. D. Murnaghan and T. L. Smith, A. M. P. Memo. 42.4M(1914).

〔5-2〕 E. G. Richardson, Proc, Phys. Soc. (London), 61, 352(1948).

〔5-3〕 W. Johnson and S. R. Reid, J. Mech. Engr. Sci. 18, 243(1976).

〔5-4〕 J. M. Hutchings, Int. J. Mech. Sci., 18, 243(1976).

〔5-5〕 A. S. Soliman, S. R. Reid and W. Johnson, Int. J. Mech Sci. 18, 279 (1976).

〔5-6〕 M. E. Backman and S. A, Finnegan, Tech. Report TP 5844, U. S. Navy Weapons Center, China Lake, California(1976).

〔5-7〕 J. V. Poncelet, Cours de Mecanique Industrielle, Paris (1829/1835).

〔5-8〕 H. P. Robertson, Terminal Ballistics, National Research Council, Washington(1941).

〔5-9〕 C. W. Young, SC-TM-66-2611, Sandia Laboratory, Albuquerque, New Mexico (1967).

〔5-10〕 R. T. Allen, Information Report SSS-IR-74-2192, System, Science and Software, Le Jolle, California(1974).

〔5-11〕 T. D. Murff and H M. Coyle, J. Soil Mech. Foundations Division, Proc. ASCE 99, 1933(1973).

〔5-12〕 R. F. Bishop, R. Hill and N F. Mott, Proc. Phys. Soc. (London), 57, 147, (1945).

〔5-13〕 J. N. Goodier, Proc. 7th Symp. Hypervelocity Impact, Vol III, AIAA, J. (1965), See also Stanford Research Institute, Report TROO2 64, Roulter Research Laboratories(1964).

〔5-14〕 B. Ross and S. Hanagud, Report 7000-452-4, Stanford Research Institute, Menlo Park, California(1969).

〔5-15〕 B. Ross and S. Hanagud, Report N0014-71A0243 Stanford Research Institute, Menlo Park, California (1971).

〔5-16〕 S. Hanagud and B. Ross, AIAA, J, 9, 905 (1971).

〔5-17〕 F. R. Norwood, Report SLA-74-0201, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico(1974).

〔5-18〕 R. S. Bernard and S. V. Hanagud, Tech. Rpt. S-75-9, U. S. Army Corps of Engineers of Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi(1975).

〔5-19〕 R. S. Bernard and D. C. Creighton, Tech. Report S-76-B, U. S. Army Corps of Engineers of Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi (1976).

〔5-20〕 B. Rohani, Proc. Conf. On Rapid Penetration of Terrestial Materials, Texas A and M University, Collage Station(1977).

[5-21] M. H. Wagner, K. N. Kreyenhagan and W. S, Goerke, Contract Report S-75-4. California Research and Technology, Inc. Woodland Hills, California, Prepared to Defense Nuclear Agency(1975).

[5-22] D. L. Orphal, W. F. Borden and J. E. Reauch, DNA-3685F, Defense Nuclear Agency, Washington D. C. (1975).

[5-23] Mark L. Wilkins, Rpt UCRL-7322, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California (1963).

[5-24] I. Nelson, M. L. Baron and I. Sandler, In Shock Waves and the Mechanical Preperties of Solids (Edited by J. J. Burke and V. Weiss), Syracuse University Press, Syracuse, New York(1971).

[5-25] R. K. Byers and A. J. Chabai, International Journal of Numerical and Analytical Methmatics in Geomechanics I, 107(1977).

[5-26] S. E. Benzley, L. D. Bertholf and G. E. Clark, Report SC-DR-72-05 23, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico(1972).

[5-27] B. J. Throne and D. B. Holdridge, Report SLA-73-1057, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico(1974).

[5-28] B K. Byers, P. Yarrington and A. J . Chabi, Dynamic Penetration of Soil Media by Slender Projectiles, Int. J. of Engng. Sci. Vol 16, 835 (1978).

[5-29] G. R. Johnson, Analysis of Elastic-Plastic Impact Involving Severe Distortions. J. of Appl. Mech., Trans. ASME Series E, 43(3), 439~444 (1976).

[5-30] M. L. Wilkins, Calculation of Elastic-Plastic Flow Methods in Computational Physics, Vol. 3 eds. by Alder, B., Fernbach, S., and Rotenberg, M., Academic Press, New York, 1964, pp211~263.

[5-31] W. N. Caudle, A. Y. Pope, R. L. McNeill and B. E. Margason, Rpt. SC-DC-67-1922, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico(1967).

[5-32] M. L. Anthony, Proc. 2nd International Symposium on Ballistics, Session V A, American Defense Preparedness Assoc., Washington, D. C. (1976).

[5-33] D. J. Scott, Proc. 1st Int. Symp. on Ballistics, American Defense Preparadness Assoc., Washington, D. C. (1974).

[5-34] Pictinny Arsenal, Progress Reports No. 4 and 5, Avco Corp. Contract No. DAAA 21-71-C-0517(1971).

[5-35] Proc. AIAA Hypervelocity Impact Conference, Cincinnati, Ohio(1969).

[5-36] M. Pitck and G. F. Hammit, University of Michigan Nuclear Engineering Dept Tech. Report, No. 1(1966).

第六章　薄板靶体的侵入和击穿（上）

§6.1　薄板靶体在弹体撞击下的特点

薄板靶体（简称薄板靶或薄靶板）和半无限靶体很不一样。当弹体撞击半无限靶体时，只有侵入和回跳问题。既不产生靶体的整体变形，也没有靶体的击穿问题。但当弹体撞击薄板靶时，一方面会产生象图 1-2 所说的那种靶板隆起和盘形凹陷的整体变形，同时还会产生象图 1-3 上所说的各种各样的击穿破坏。这些现象都是板内正应力、弯曲应力和剪应力的弹塑性波和流体动力学波所产生的。在高速运动中，摩擦作用、灼热点燃、裂缝的传播和驻留等现象，还会引起一系列微观的和宏观的断裂和相变，在撞击条件相当宽的范围内，分析撞击过程时，可以把弹体看作是不变形的。当然，弹体有时也会遭受形式不同的损坏。但把弹体当作刚体而进行薄板靶体的撞击分析，还是人们的主要手段。在薄板靶体中的弹性效应，一般是可以略去不计[6-1,6-2]。当然，在离撞击中心较远区域，弹性效应有时还是很明显的[6-3]。

本章和第七、第八章都是讲薄板靶体问题。它将分为经验公式；刚性弹体撞击靶体的破坏分析模式，包括弹体变形时靶体的破坏分析模式；超高速撞击特性和适用于中等原度靶板问题的连续介质数值计算方法。薄板靶体的试验很多，它们且和撞击模式密切相关。为了简化问题，我们将主要研究垂直撞击，只要研究的结论是基本性质的，则这些结论就很容易推广到斜击问题中去。为了评价这些假定和基本结论，我们也研究了斜击，但只研究了弹轴取向和轨迹线成零角时的斜击问题。

§6.2　经验公式

图 6-1 为弹体撞击薄板的典型撞击相图。在这种相图中，靶

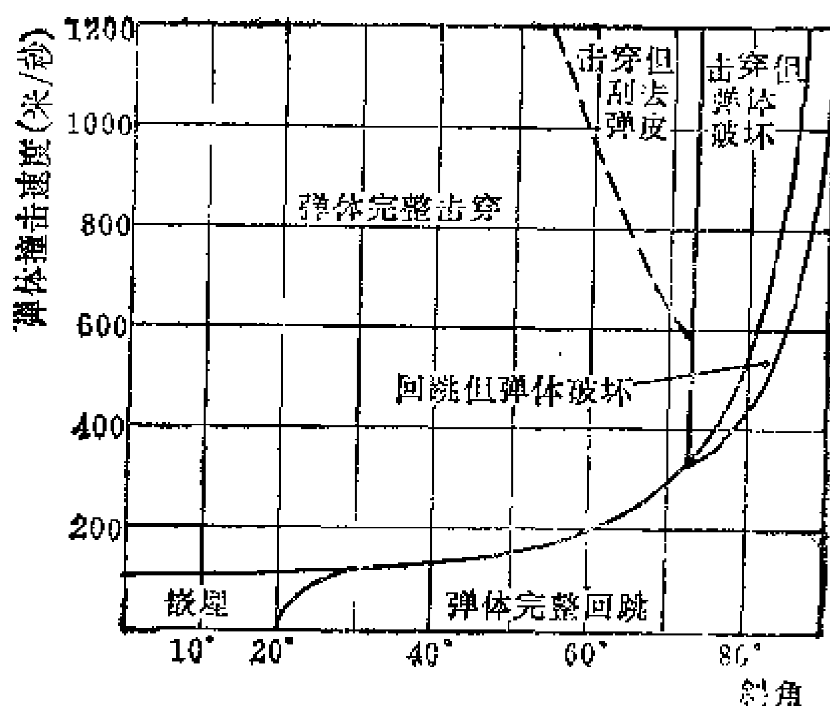


图6-1 7.62毫米直径子弹撞击1.27毫米厚铝合金板的简化相图

元外侧表面的变形对靶体的动力学性质非常重要。相图中应该还有一个嵌埋弹体的相区，这个相区的弹道极限速度很低，所以，只在很低速度中才能显示出来，当斜角稍大时，这个相区就很狭窄，在相图上就分辨不出来了。在薄板靶撞击中，侵入问题并不重要，人们重视的是弹道极限速度和击穿后弹体的剩余速度。这和装甲的护卫功能有直接关系。

美军陆军弹道研究实验室公布的《侵入方程手册》[6-4]曾收集了大量的有关薄板靶和中厚板靶的经验公式和简单理论模型的分析公式，这些公式都已写成无量纲参量的形式。

这些公式可以分成两类：

第一类公式是弹道极限速度 v_{50} 公式

$$v_{50}=\left[B_1\left(\frac{\pi D^2 h\rho_t}{4mg}\right)^{t_1}+B_2\right]\frac{1}{\cos\theta} \tag{6.1}$$

以及弹体破碎极限速度公式

$$v_A=\sqrt{\frac{B_2\sigma_{UP}D^3}{m\sin[\cos^{-1}(\cos\theta\cos\phi)]\cos\theta}} \qquad (6.2)$$

其中D、m、σ_{UP}分别为弹体直径、弹体质量和破坏极限强度；ρ_t、h为靶板的密度和厚度；g为重力加速度；B_1、B_2是具有速度量纲的常量；B_3、b_1为无量纲的常数。(6.2)式是从(3.1)式导出的。θ为撞击斜角、ϕ为弹轴对弹道的倾角。对于碎块的变形极限曲线可以用经验公式表示

$$v'_A=B_4\left[1+\frac{\cos\theta}{\frac{B_5h}{L_d}+B_6}\right] \qquad (6.3)$$

其中B_4是具有速度量纲的常量；B_5、B_6为无量纲常量；L_d为碎块的最大尺寸；h为靶板厚度。

第二类公式是击穿后弹体的速度变化公式和弹体的形状变化公式。例如，击穿后的钝头弹体剩余速度v_f的公式为

$$v_f=\frac{m}{m+m_g}\sqrt{v_0^2-v_{50}^2} \qquad (6.4)$$

其中v_{50}为钝头弹体的弹道极限速度[见(6.1)式]；m_g为挤凿下来的靶板质量，可以用$\frac{1}{4}\pi D^2h\rho_t$表示；$v_0$为撞击速度，(6.4)是根据能量守恒定律导出的，本式在讨论挤凿穿透中还将研究。弹体碎块的质量m_f根据大量射击数据[6-5]，可以写成

$$m_f=m-mC_2\left(\frac{\rho_d h_t A_d}{m}\right)^{b_3}\left(\frac{v}{C_1}\right)^{b_4}\left(\frac{\rho_d h_t A_d}{m^*}\right)^{b_5} \qquad (6.5)$$

其中m为弹体原始质量；m^*为固定质量，等于0.031千克；v为撞击速度；C_1是具有速度量纲的常数；ρ_d、A_d分别为变形后弹体碎块的密度和截面；h_t为靶板厚度；b_3、b_4、b_5为无量纲系数。(6.4)、(6.5)是根据美国不同机构对飞机靶体的实测结果综合而成，其中包括撞击体的整体变形和碎裂。

另一类公式把弹道极限速度v_{m50}和弹体、靶体尺寸联系起来：

$$v_{n50}=\frac{B_7\left(\frac{h_t}{D}\right)^{0.7}}{D^{0.05}(mg/D^3)^{0.5}} \tag{6.6}$$

其中D为弹体直径；h_t为靶厚；mg为弹体重量；v_{n50}为垂直撞击的弹道极限速度；B_7既和靶体材料有关，也和弹体形状有关，它是一个量纲为$M^{0.6}L^{0.05}T^{-2}$的常数。同样形式的公式也曾从锥形弹头的分析理论中求得过[6-6]，这个理论中还给出了一个垂直撞击的公式，其形也可以归入（6.1）式的类型：

$$\frac{h_t}{D}=\frac{38.2(mg/D^3)}{(K_t g\rho_t)^{1/2}(\sin\beta+f\cos\beta)}\cdot\left[v_{n50}-\frac{C_2}{\sin\beta}\ln\left(1+\frac{v_{n50}\sin\beta}{C_2}\right)\right] \tag{6.7a}$$

其中

$$C_2=\sigma_{US_t}\ln\left\{\frac{2E_t}{\sigma_{UT_t}}\left[\left(1+\frac{E_t}{\sigma_{UT_t}}\right)\frac{6K_t\rho_t}{g}\right]^{-1/2}\right\} \tag{6.7b}$$

式中mg、D、v_{n50}和前面定义的相同，其余符号为：

K_t——靶体的体积膨胀弹性常数；

E_t——靶体的杨氏模量；

σ_{US_t}——靶体的剪力强度；

σ_{UT_t}——靶体的拉伸强度；

ρ_t——靶体密度；

β——锥形弹头的锥角；

f——摩擦系数。

还有人研究了比极限能量mgv_{50}^2/D^3和尺寸比h/D之间的关系。

弹道极限速度v_{n50}也可以用各种速度损失叠加起来而得，每一种速度损失都代表与某种运动机理有关的速度损失。如与靶元横向位移有关的速度损失、与花瓣型破坏有关的速度损失、与隆起变形和盘形凹陷有关的速度损失，以及与弹体变形有关的速度损失等。图 6-2 为各种不同尺寸的高碳钢弹体碎块和钝头柱形弹

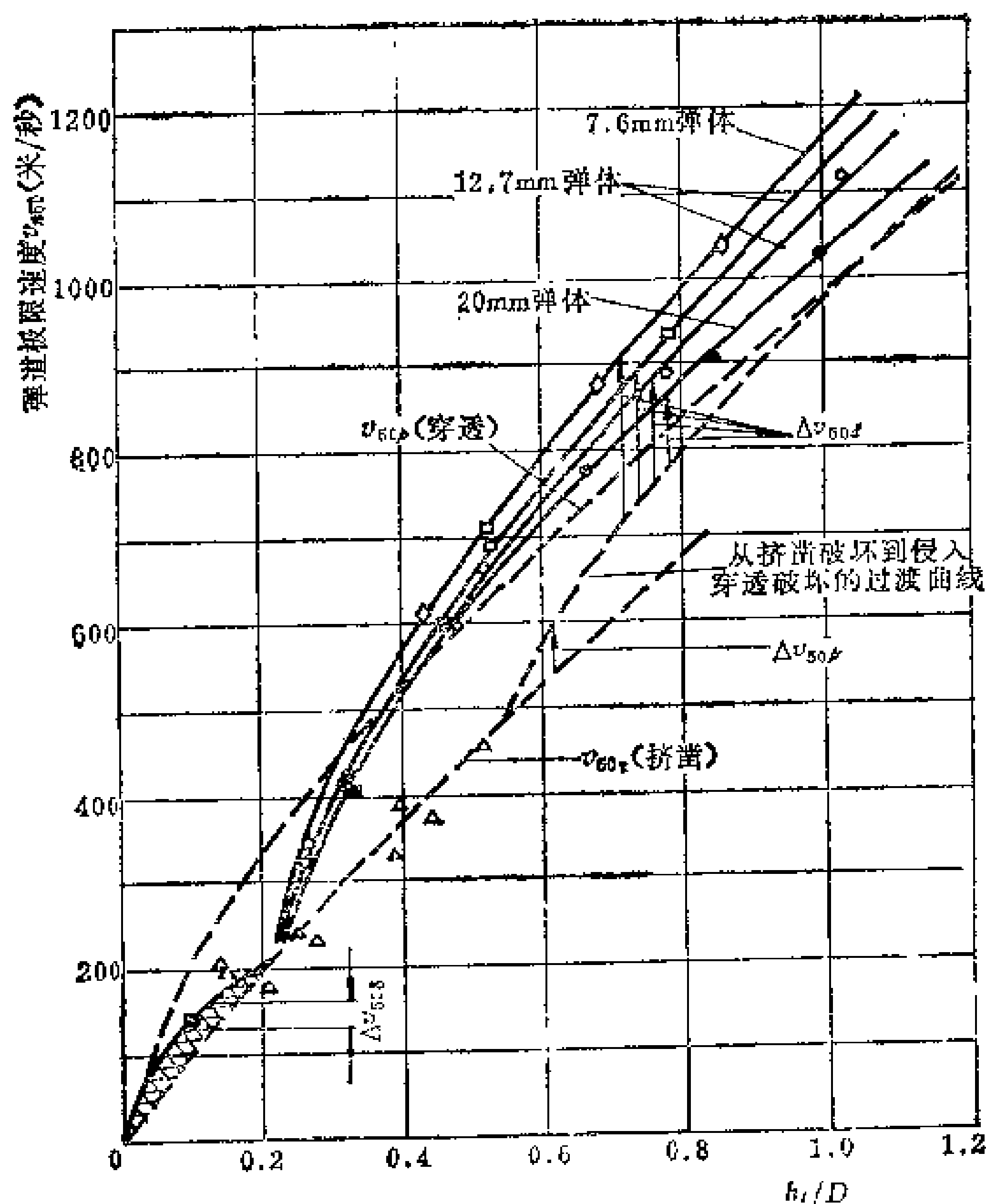


图6.2 刚性的和可变形的钝头碎块撞击钢板的弹性极限速度

钢弹体	钢板 MIL 12560	钢板 230BHN
7.6毫米WAL钝弹体	◇	▽
12.7毫米WAL钝弹体	○	□
20.0毫米WAL钝弹体	●	■
钝头柱形弹体	△	

$v_{n50}=v_{50\tau}+\Delta v_{50\delta}+\Delta v_{50p}+\Delta v_{50d}$

$v_{50\tau}$—刚性钝头弹体挤凿破坏弹道极限速度。

$\Delta v_{50\delta}$—靶板隆起和盘形凹陷的速度损失。

Δv_{50p}—刚性钝头弹体穿透靶板的速度损失。

Δv_{50d}—弹体变形所增加的速度损失。

v_{50p}—刚性钝头弹体穿透靶板的弹道极限速度。

体（硬度为 230BHN）的弹道极限速度。柱型弹体的撞击用(6.1)型方程表示，具体说来是

$$v_{n50}=1100\left(\frac{h_t}{D}\right)^{0.75} \quad (\text{米/秒}) \tag{6.8}$$

有关碎块的数据包括了与挤凿、隆起、盘形凹陷、横向膨胀和弹体变形影响有关的总和[6-7]。

有关弹头形状的影响可以用钝头弹体的弹道极限速度 $v_{n50(钝)}$ 和尖头弹体的弹道极限速度 $v_{n50(尖)}$ 的比来表示：

$$\frac{v_{n50(钝)}}{v_{n50(尖)}}=e^{-b_4\frac{h}{D}}+1.14\left(1-e^{-b_5\frac{h}{D}}\right) \tag{6.9}$$

其中 b_4、b_5为无量纲常数，它只和靶体的材料性能有关。有关对不同尖度的弹头的修正也是已知的[6-5]。

在超高速区域里，贡豪舍[6-8]曾提出阻止弹体穿透时所采用的板厚与弹体的动能 T_0 以及靶板的杨氏模量 E_t 有关。

$$h_t=3\left(\frac{T_0}{E_t}\right)^{1/3}\left(\frac{E_t}{C_1}\right)^{0.09} \tag{6.10}$$

其中 $C_1=6.9$（GPa）。一般说来，靶板上所留弹孔直径，除极薄的靶板外，总是略大于弹体本身的直径。薄靶板的弹孔直径D_c可以表示如下[6-9]：

$$\frac{D_c}{D}=C_2\left(\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2\left(\frac{h_t}{D}\right)^{2/3}+1 \tag{6.11}$$

式中 v_0为撞击速度。对于 C_2，根据理论论证应该是2.6。但把硼硅酸耐热玻璃球在 15000 米/秒的速度下射向铝合金靶所得实验数据中求得为 3.2。舍棱逊[6-10]根据大量实验研究，指出(6.11)应该用含有靶板材料的剪力强度的经验公式来表示

$$\frac{D_c}{D}=\left(\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)^{0.055}\left[\rho_p\left(\frac{v_0^2}{\sigma_{US_t}}\right)\right]^{0.01}\left(\frac{h_t}{D}\right)^{2/3}+1 \tag{6.12}$$

美国宇航局海独克等[6-11]曾用尼龙制球和镉球在3000～8500米/秒的速度下撞击2024铝制靶板，求得侵入靶板的起码撞击速度 v_0 满足下式

$$\frac{h_t}{D}=C_3(\epsilon_{UT_t})^{-1/16}\left(\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)^{1/2}v_0 \tag{6.13 a}$$

或

$$\frac{h_t}{D}=C_3D^{0.056}\rho_p^{0.519}v_0^{0.875} \tag{6.13 b}$$

其中 ϵ_{UT_t} 为靶板材料极限拉伸应变。

米赛等（1976）[6-12]曾用钢杆在垂直方向和60°斜角方向撞击轧制的装甲钢板，求得弹道极限速度的经验公式如下：

$$v_{50}=\frac{B_1D^3\left\{\left[\frac{h_t}{D}\sec\theta\right]^{b_1}\right\}^{1/2}}{mg} \tag{6.14}$$

其中 b_1 为无量纲常数；B_1的量纲为 $ML^{-1}T^{-3}$； θ 为撞击斜角。

他们还曾从实验数据求得弹体穿透靶体后的剩余速度 v_l 为

$$v_l=\begin{cases}0, & 0\leqslant v_{n0}\leqslant v_{n50}\\ B_4(v_{n0}^{b_3}-v_{n50}^{b_3})^{1/b_3}, & v_{n50}\leqslant v_{n0}\end{cases} \tag{6.15}$$

其中 $0\leqslant B_4\leqslant 1$，$b_3>1$。例如，对于$L/D=5$时，$B_4=0.74$，$b_3=4.4$，$v_{n50}=720$ 米/秒。式中 v_{n0} 为垂直撞击速度，v_{n50} 为垂直撞击的弹道极限速度。

他们[6-12]还曾从实验数据中找到了弹道极限速度和撞击斜角的关系、有关剩余质量的表达式、靶后碎块的分布等经验公式。

§6.3 分析模式

弹体和靶元撞击，使得弹体通过撞击占据了原先是由靶元所占据的某一部分空间。这个过程是很复杂的，对弹体的刚性假设可以简化整个分析。所以，最基本的撞击模式有两种：（1）假设弹体是刚性的模式；（2）允许弹体变形的模式。

如果我们假定弹体是刚性的，则撞击对弹体的影响只能是对弹体运动状态的改变，而靶体则通过他自己的变形，把原来是靶体材料占有的空间让给了不变形的刚性弹体。当靶体产生位移变形时，产生了作用于弹体上的反作用力，从而改变弹体的运动。

一种刚性弹体侵入靶板的分析模式，必须能描述这种运动的变化及其效应。对靶板变形位移的最根本的问题，是如何描述靶体内部材料被弹体分开，将空间让位给弹体的过程和机理。

靶体受刚性弹体侵入的任何分析模式必须突出下列几点：(1)靶元局部位移的假设；（2）为击穿而选择靶板内部分开的机理（它和弹体形状有关）；（3）建立靶板位移变形运动和弹体运动之间的关系；（4）建立撞击终止的准则。

§6.4 未击穿的靶板变形理论之一
——弹塑性靶板变形理论(能量理论)(1971)

板的撞击变形有两种：隆起，即板的形状变成和弹头形状一致；和盘形凹陷，即从靶板和弹头接触处向外延伸的弯曲变形。隆起可以象处理金属加工问题[6-13,6-14]那样用静力学或准静力学的方法分析处理，而盘形凹陷则只能用动力学方法处理。盘形凹陷变形既可以用弹塑性薄膜理论处理，也可以用弹塑性薄板理论处理。当弹塑性薄膜受到撞击载荷时，只涉及两个应力分量，而且只用一个空间坐标 r 表示。这样的系统可以近似处理非常薄而又柔软的靶板的动力学问题[6-15]。以尖头弹体的撞击点为坐标原点，从相似律的观点看，这样一个撞击薄膜动力学问题，可以用新的相似变量 $\xi=r/t$ 来处理。于是这个问题变为常微分方程。但这样薄而又柔软的靶板实用意义并不大，我们不进行讨论，但这类相似律法本身还是很重要的。当锥头弹体撞击无穷大的弹性-理想塑性，以及弹性-硬化塑性薄膜时，证明也可以用相同的相似律处理[6-16]。

薄板的撞击动力学问题，曾有许多人研究过[6-15,6-17,6-18]，既可以是刚塑性的，也可以是刚粘塑性的，还可以是弹性-粘塑性的；既可以是无限大圆板全面积或部分面积受载，也可以是有界圆板在一定支承条件下受载。这个问题也包括圆板受爆炸冲击的动力学[6-15]。在所有工作中，都引入了屈服铰链的概念。屈服铰链把圆板分成内、外两部分，在屈服铰链之内的圆板是塑性的；

在其外侧，有一个圆环区域是弹性的。屈服铰链的所在地是一个圆圈，它可以是稳定不动的，也可以是向外运动的。在下面的讨论中，我们可以看到，如果要求得理论和实际比较一致的结论，我们必须要同时考虑弯曲应力和薄膜应力[6-19,6-20]。

下面将介绍一下弹塑性靶板的能量理论。关于靶板在大位移情况下的弹塑性理论方程首先是龚纳斯提出来的[6-21,6-22]（1968），（1971）。德斐爱和开埃[6-23]（1969）用能量平衡法计算了靶板在撞击下产生的完全塑性变形。其后由卡特尔和哥德斯密斯[6-24]（1971）推广到硬化塑性材料。下面是卡特尔和哥德斯密斯的能量理论。

对于半径为R的圆薄板，在平面应力和轴对称条件下的总塑性应变能为ε_p，其增量为

$$d\varepsilon_p=\int_\Gamma(\sigma_r d\epsilon_r+\sigma_\theta d\epsilon_\theta)d\Gamma \tag{6.16}$$

其中$d\epsilon_r$、$d\epsilon_\theta$为应变增量，r、θ为径向和环向坐标。积分域Γ为以R为半径的整个板域。设板在撞击下发生垂直于板面的横向位移$w(r)$，于是（见图6-3），有

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_r&=\frac{ds-dr}{dr}=\sqrt{1+\left(\frac{dw}{dr}\right)^2}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\\ \epsilon_\theta&=0\end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

而且设板的厚度方向不变形，有$\epsilon_z=0$。

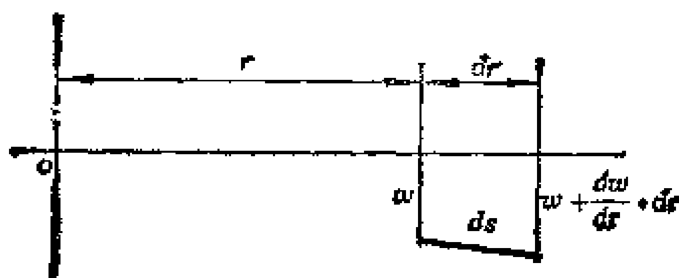


图6-3 板的变形

根据冯密西斯屈服条件（设$\sigma_z=0$），有

$$\frac{1}{2}\{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+\sigma_\theta^2+\sigma_r^2\}=\sigma_Y^2 \tag{6.18}$$

其中 σ_Y 为拉伸屈服应力。(6.18) 也可以写成

$$\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\theta+\sigma_\theta^2=\sigma_Y^2 \tag{6.18a}$$

如果材料是弹性-硬化塑性材料，则 σ_Y 和 ϵ_r 有下列线性关系（见图6-4）：

$$\sigma_Y=\sigma_{Y0}+E_p\epsilon_r \tag{6.19}$$

其中 E_p 为拉伸曲线在塑性范围内的切线模量，σ_{Y0}为 $\epsilon_r=0$ 时的初始屈服应力。

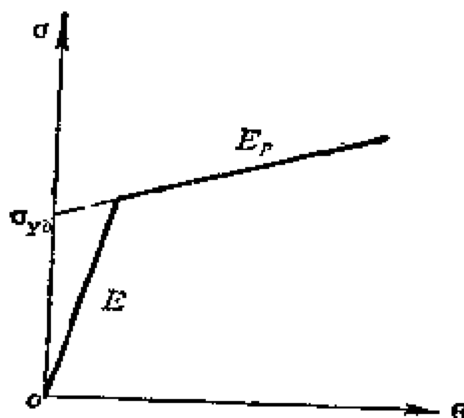


图6-4 弹性-硬化塑性的拉伸曲线

最后（6.18a）可以写成

$$\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\theta+\sigma_\theta^2=(\sigma_{Y0}+E_p\epsilon_r)^2 \tag{6.20}$$

根据弹性范围的应力应变关系，由于 $\epsilon_\theta=0$，我们有

$$\sigma_\theta=\nu\sigma_r \tag{6.21}$$

其中 ν 为泊桑比。我们将假定，这个关系同样满足于屈服以后，把（6.21）代入（6.20），得

$$\sigma_r=\frac{\sigma_{Y0}+E_p\epsilon_r}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \tag{6.22}$$

把 $\epsilon_\theta=0$ 和（6.22）代入（6.16），得

$$d\varepsilon_p=\int_\Gamma\frac{\sigma_{Y0}+E_p\epsilon_r}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}d\epsilon_r d\Gamma \tag{6.23}$$

$d\varepsilon_p$ 从 $\epsilon_r = 0$ 到 $\epsilon_r = \epsilon_r$ 积分，得应变能

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \int_\Gamma \left(\sigma_{Y_0} \epsilon_r + \frac{1}{2} E_p \epsilon_r^2 \right) d\Gamma \qquad (6.24)$$

其中 $d\Gamma = 2\pi hrdr$，于是上式可以写成

$$\varepsilon_p = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \int_0^R \left[\frac{1}{2} E_p \epsilon_r^2 + \sigma_{Y_0} \epsilon_r \right] rdr \qquad (6.25)$$

再把（6.17）代入上式，得靶板变形的应变能

$$\varepsilon_p = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \int_0^R \left\{ \frac{1}{8} E_p \left(\frac{dw}{dr} \right)^4 + \frac{1}{2} \sigma_{Y_0} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right\} rdr$$

$$(6.26)$$

这些应变能都来自弹体撞击时的动能 $\frac{1}{2} mv_0^2$。所以有

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} mv_0^2 \qquad (6.27)$$

或可写成

$$\int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^4 rdr + \frac{4\sigma_{Y_0}}{E_p} \int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 rdr$$

$$- \frac{2(1-\nu+\nu^2)^{1/2}}{E_p \pi h} mv_0^2 = 0 \qquad (6.28)$$

实验中观察到 $w(r)$ 可以近似地用下式表示，

$$w(r) = w_0 e^{-r} \qquad (6.29)$$

其中 w_0 为撞击中心的最大位移。并设 R 为无穷大，则

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{dw}{dr} \right)^4 rdr = w_0^4 \int_0^\infty e^{-4r} rdr = \frac{1}{16} w_0^4 \\ \int_0^\infty \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 rdr = w_0^2 \int_0^\infty e^{-2r} rdr = \frac{1}{4} w_0^2 \end{aligned} \right\} \qquad (6.30)$$

于是，从（6.28）求得

$$w_0^4 + \frac{16\sigma_{Y_0}}{E_p} w_0^2 - \frac{32\sqrt{1-\nu+\nu^2}}{E_p \pi h} mv_0^2 = 0 \qquad (6.31)$$

这个方程和实验所得结果很符合。例如，卡特尔和哥德斯密斯(1971)[6-24]曾用直径为12.7毫米的钢球以撞击速度为120米/秒的速度撞击1.27毫米厚的2024铝板所得最大位移，即符合(6.31)的理论结果。

§6.5 未击穿的靶板变形理论之二
——克莱-维尔肖弹性粘塑性变形理论(1971)[6-27]

用理想塑性和硬化塑性靶板理论处理集中载荷时，有相当大的数学困难。这种困难在用增量理论作为时间变率来处理时，就迎刃而解了。到目前为止，已有许多人研究了弹体垂直撞击粘塑性圆板中心时的变形问题[6-24,6-25,6-26,6-27,6-28,6-19]。

粘塑性材料一维变形的平均关系为

$$\dot{\epsilon}=\frac{2\gamma}{\sqrt{3}}\frac{\sigma-\sigma_{YT}}{\sigma_{YT}} \tag{6.32}$$

其中 σ_{YT} 为材料的静力拉伸屈服应力，γ 为粘塑性松弛时间的倒数。把(6.32)推广到多维问题中去时有多种可能形式[6-31,6-32]，最简单的一种形式是

$$\dot{\epsilon}_{ij}=\sqrt{3}\,\gamma\left[\frac{\left(\frac{1}{2}s_{kl}s_{kl}\right)^{1/2}-\sigma_{YT}/\sqrt{3}}{\sigma_{YT}}\right]\cdot\frac{s_{ij}}{\left(\frac{1}{2}s_{kl}s_{kl}\right)^{1/2}} \tag{6.33}$$

本式可以用来处理$\left(\frac{1}{2}s_{kl}s_{kl}\right)^{1/2}\geqslant\sigma_{YT}/\sqrt{3}$的问题。其中$\dot{\epsilon}_{ij}$为应变速度张量；$s_{ij}$为应力张量。这是一个非线性关系。克莱[6-26]曾假定在应力偏量 s_{ij} 的九维空间内，应力线近似地保持直线，亦即

$$\frac{s_{ij}}{\left(\frac{1}{2}s_{kl}s_{kl}\right)^{1/2}}=\frac{s_{Yij}}{\sigma_{YT}/\sqrt{3}} \tag{6.34}$$

其中 s_{Yij} 为在冯密西斯屈服面上的应力偏量。于是，线性化的三维粘塑性本构关系可以写成

$$\dot{\epsilon}_{ij}=\frac{\sqrt{3}\ \gamma}{\sigma_{YT}}(s_{ij}-s_{Yij}) \tag{6.35}$$

对于圆薄板弯曲问题而言，我们有

$$\dot{\epsilon}_r=\dot{\epsilon}_{11}=-z\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},\quad \dot{\epsilon}_\theta=\dot{\epsilon}_{22}=-z\frac{\partial v}{r\partial r},\quad v=\dot{w} \tag{6.36}$$

$$\left.\begin{aligned}
s_{11}&=s_r=\sigma_r-\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\theta)=\frac{1}{3}(2\sigma_r-\sigma_\theta),\quad s_{Y11}\\
&=\frac{1}{3}(2\sigma_{Yr}-\sigma_{Y\theta})\\
s_{22}&=s_\theta=\sigma_\theta-\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\theta)=\frac{1}{3}(2\sigma_\theta-\sigma_r),\quad s_{Y22}\\
&=\frac{1}{3}(2\sigma_{Y\theta}-\sigma_{Yr})
\end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

其中 v 为板的挠变速度，z 为板上中面法向坐标。于是，有

$$\left.\begin{aligned}
-z\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}&=\frac{\gamma}{\sqrt{3}\,\sigma_{YT}}[2\sigma_r-\sigma_\theta-(2\sigma_{Yr}-\sigma_{Y\theta})]\\
-z\frac{\partial v}{r\partial r}&=\frac{\gamma}{\sqrt{3}\,\sigma_{YT}}[2\sigma_\theta-\sigma_r-(2\sigma_{Y\theta}-\sigma_{Yr})]
\end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

其中 s_{Yij}（或 $s_{Y\theta}$、$\sigma_{Y\theta}$）满足冯密西斯屈服条件

$$\frac{1}{2}(s_{Yij}s_{Yij})=\frac{1}{3}\sigma_{YT}^2 \tag{6.39a}$$

$$\sigma_{Yr}^2-2\sigma_{Yr}\sigma_{Y\theta}+\sigma_{Y\theta}^2=\sigma_{YT}^2 \tag{6.39b}$$

于是（6.38）可以写成

$$\sigma_r=\sigma_{Yr}-\frac{2\sigma_{YT}}{\sqrt{3}\ \gamma}z\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{2r}\ \frac{\partial v}{\partial r}\right) \tag{6.10a}$$

$$\sigma_\theta=\sigma_{Y\theta}-\frac{2\sigma_{YT}}{\sqrt{3}\,\Upsilon}z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) \quad (6.40\,\mathrm{b})$$

积分求得弯矩，(把 σ_{Yr}、$\sigma_{Y\theta}$的正负和 z 的正负看作一致)。

$$M_r=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\sigma_r z dz=M_{Yr}-\frac{2M_Y}{3\sqrt{3}\,\Upsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{2r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)h_t \quad (6.41\,\mathrm{a})$$

$$M_\theta=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\sigma_\theta z dz=M_{Y\theta}-\frac{2M_Y}{3\sqrt{3}\,\Upsilon}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right)h_t \quad (6.41\,\mathrm{b})$$

其中 M_Y、M_{Yr}、$M_{Y\theta}$分别为

$$M_Y=\sigma_{YT}\frac{h_t^2}{4} \quad (6.42\,\mathrm{a})$$

$$M_{Yr}=\sigma_{Yr}\frac{h_t^2}{4} \quad (6.42\,\mathrm{b})$$

$$M_{Y\theta}=\sigma_{Y\theta}\frac{h_t^2}{4} \quad (6.42\,\mathrm{c})$$

$$M_{Yr}^2-M_{Yr}M_{Y\theta}+M_{Y\theta}^2=M_Y^2 \quad (6.42\,\mathrm{d})$$

运动方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_r)-\frac{1}{r}M_\theta=Q,\quad 当\ 0\leqslant r\leqslant R_t \quad (6.43\,\mathrm{a})$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ)=\rho_t h_t\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{m}{\pi R_p^2}\frac{\partial v}{\partial t},\quad 当\ 0\leqslant r\leqslant R_p \quad (6.43\,\mathrm{b})$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ)=\rho_t h_t\frac{\partial v}{\partial t},\quad 当\ R_p\leqslant r\leqslant R_t \quad (6.43\,\mathrm{c})$$

其中Q为剪力，R_p为撞击载荷的作用半径，把(6.41)代入(6.43)，得

$$-\frac{2M_Y h_t}{3\sqrt{3}\,\Upsilon}\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 v)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_{Yr})-\frac{1}{r}M_{Y\theta}=Q,$$

$$当\ 0\leqslant r\leqslant R_t \quad (6.43\,\mathrm{a})$$

$$-\frac{2M_Y h_t}{3\sqrt{3}\,Y}\nabla^2\nabla^2 v+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM_{Yr})-M_{Y\theta}\right]$$

$$=\begin{cases}\rho_t h_t\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{m}{\pi R_t^2}\dfrac{\partial v}{\partial t}, & \text{当 } 0\leqslant r\leqslant R_p \qquad (6.43\,b) \\ \rho_t h_t\dfrac{\partial v}{\partial t}, & \text{当 } R_p\leqslant r\leqslant R_t \qquad (6.43\,c)\end{cases}$$

其中

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} \tag{6.44}$$

当 $R_p\to 0$ 时，M_{Yr}、$M_{Y\theta}$ 相当于中心集中载荷 P'（待定）所形成的静力屈服弯矩，于是（6.43 b，c）中有关 M_{Yr}、$M_{Y\theta}$ 项为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM_{Yr})-M_{Y\theta}\right]=0,\quad \text{当 } 0\leftarrow R_p\leqslant r\leqslant R_t \tag{6.45}$$

积分得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_{Yr})-\frac{1}{r}M_{Y\theta}=-\frac{P'}{2\pi r},\quad 0\leftarrow R_p\leqslant r\leqslant R_t \tag{6.46}$$

现在让我们决定 P'。M_{Yr}、$M_{Y\theta}$ 是屈服弯矩，我们设材料在塑性静力变形中是不可压缩的。于是

$$M_{Yr}+M_{Y\theta}=0,\quad \text{当 } 0\leftarrow R_p\leqslant r\leqslant R_t \tag{6.47}$$

则（6.46）化为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_{Yr})+\frac{1}{r}M_{Yr}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2M_{Yr})=-\frac{P'}{2\pi r} \tag{6.48}$$

积分，因其积分常数为零〔因为 $(M_{Yr})_{r\to 0}$=有限〕，所以有

$$M_{Yr}=-\frac{P'}{4\pi} \tag{6.49}$$

把（6.47）、(6.49）代入（6.42 c），给出

$$P'=-\frac{4\pi M_Y}{\sqrt{3}} \tag{6.50}$$

这就决定了P'，把（6.45)、(6.46）代入（6.43 a 、b、c），得

$$-\frac{2M_Y h_t}{3\sqrt{3}\,Y}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 v-\frac{2M_Y}{\sqrt{3}\,r}=Q,\ \text{当}\ 0\leqslant r\leqslant R_t \quad (6.51\text{a})$$

$$-\frac{2M_Y h_t}{3\sqrt{3}\,Y}\nabla^2\nabla^2 v$$

$$=\begin{cases}\rho_t h_t\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{m}{\pi R_t^2}\dfrac{\partial v}{\partial t},\ \text{当}\ 0\leqslant r\leqslant R_p & (6.51\text{b})\\[2ex] \rho_t h_t\dfrac{\partial v}{\partial t},\ \text{当}\ R_p\leqslant r\leqslant R_t & (6.51\text{c})\end{cases}$$

现在设R_p很小，在$0\leqslant r\leqslant R_p$之内，$\frac{\partial v}{\partial t}$几乎和$r$无关，即$\frac{\partial v}{\partial t}\approx\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{r=0}$，于是积分（6.51 b）得

$$-2\pi\frac{2M_Y h_t}{3\sqrt{3}\,Y}r\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 v=\pi\rho_t h_t r^2\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$+\frac{mr^2}{R_p^2}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{4\pi M_Y}{\sqrt{3}},\ \text{当}\ 0\leqslant r\leqslant R_p \quad (6.52)$$

当$R_p\to 0$时，得

$$-\frac{4\pi M_Y h_t}{3\sqrt{3}\,Y}\mathscr{L}\mathrm{im}_{r\to 0}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 v\right\}=m\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{4\pi M_Y}{\sqrt{3}},$$

$$\text{当}\ t\geqslant 0 \quad (6.52\text{a})$$

这就是中心撞击的运动方程。当$R_p\to 0$时，(6.51 c）可以写成

$$-\frac{2M_Y}{3\sqrt{3}\,Y}\nabla^2\nabla^2 v=\rho_t\frac{\partial v}{\partial t},\ \text{当}\ 0\leqslant r\leqslant R_t \quad (6.53)$$

(6.53）为求解本题的微分方程。(6.52 a）为中心条件之一。为了方便研究，让我们引进下列无量纲坐标

$$x=\frac{r}{R_t} \quad (6.54\text{a})$$

$$\tau = t\left(\frac{2M_Y}{3\sqrt{3}\,\gamma\rho_t R_t^4}\right) \tag{6.54b}$$

（6.52a）、（6.53）可以写成

$$\nabla_x^2\nabla_x^2 v + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0，\quad 当\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{6.55a}$$

$$-\mathscr{L}\lim_{x\to 0} x\frac{\partial}{\partial x}\cdot\nabla_x^2 v = \frac{m}{2\pi\rho_t R_t^2 h_t}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)_{x=0} + \frac{3\gamma R_t^2}{h_t} \tag{6.55b}$$

其中

$$\nabla_x^2 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\, x\frac{\partial}{\partial x} \tag{6.55c}$$

首先，让我们求（6.55a、b）的稳定解（即和 τ 无关的解 v^*），它满足

$$\nabla_x^2\nabla_x^2 v^* = 0，\quad 当\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{6.56a}$$

$$-\mathscr{L}\lim_{x\to 0}\ x\ \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 v^* = \frac{3\gamma R_t^2}{h_t} \tag{6.56b}$$

从条件（6.56a）积分一次，并使用（6.56b）求得积分常数，求得

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}\ \frac{\partial}{\partial x}\, x\frac{\partial v^*}{\partial x}\right] = -\frac{3\gamma R_t^2}{h_t} \tag{6.57a}$$

积分三次，得 v^* 的解

$$v^* = -\frac{3\gamma R_t^2}{h_t}\left\{\frac{1}{4}\ x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}c_1x^2 + c_2\ln x + c_3\right\} \tag{6.57b}$$

其中，积分常数 c_1、c_2、c_3 用下列固定边界条件决定：

$$x = 0\ 时，v^*有限 \tag{6.58a}$$

$$x = 1\ 时，v^* = 0，\ \frac{dv^*}{dx} = 0 \tag{6.58b}$$

由此求得

$$c_1 = \frac{1}{2}，\quad c_2 = 0，\quad c_3 = \frac{1}{8} \tag{6.58c}$$

而稳定解 v^* 可以写成

$$v^* = -\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}\{1 - x^2 + 2x^2\ln x\} \tag{6.59}$$

设（6.55 a、b）的解可以写成

$$v(x,\ \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(x)e^{-\lambda_n^4\tau} - \frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}(1 - x^2 + 2x^2\ln x) \tag{6.60}$$

把（6.60）代入（6.55 a、b），得

$$\frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\ x\frac{d\psi_n}{dx}\right] - \lambda_n^4\psi_n = 0,$$

$$n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{6.61 a}$$

$$\mathscr{L}\mathrm{im}_{x\to 0}\ x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\ x\frac{d\psi_n}{dx}\right] = \frac{1}{2}\beta\lambda_n^4\psi_n(0),$$

$$n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{6.61 b}$$

还有边界条件

$$x = 0,\ \psi_n = \text{有限} \tag{6.62 a}$$

$$x = 1,\ \psi_n = 0 \tag{6.62 b}$$

$$x = 1,\ \frac{d\psi_n}{dx} = 0 \tag{6.62 c}$$

从条（6.61 b）、（6.62 a，b，c）中求解（6.61 a）是一个特征值问题。（6.61 b）中的 β 为 $\frac{m}{\pi R_t^2\rho_t h_t}$，它是弹体和靶板的质量比。

我们将证明 $\psi_n(x)$ 有下列正交关系

$$\frac{1}{2}\beta\psi_m(0)\psi_n(0) + \int_0^1 \psi_n(x)\psi_m(x)x dx = 0,$$

$$m \neq n \tag{6.63 a}$$

并取正则关系

$$\frac{1}{2}\beta\psi_n(0)\psi_n(0) + \int_0^1 \psi_n(x)\psi_n(x)x dx = 1,$$

$$n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{6.63 b}$$

从（6.61），我们有

$$\int_0^1 \psi_m \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d\psi_n}{dx}\right] dx$$

$$-\lambda_n^4 \int_0^1 \psi_n\psi_m x dx = 0 \qquad (6.64\,a)$$

$$\int_0^1 \psi_n \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d\psi_m}{dx}\right] dx$$

$$-\lambda_m^4 \int_0^1 \psi_n\psi_m x dx = 0 \qquad (6.64\,b)$$

通过分部积分，并利用（6.62 a 、 b 、 c ）、（6.61 b ），我们有

$$-\left[\frac{1}{2}\beta\psi_n(0)\psi_m(0) + \int_0^1 \psi_n\psi_m x dx\right]\lambda_n^4$$

$$+\int_0^1 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d\psi_n}{dx} \cdot \frac{d}{dx} x \frac{d\psi_m}{dx} dx = 0 \qquad (6.65\,a)$$

$$-\left[\frac{1}{2}\beta\psi_n(0)\psi_m(0) + \int_0^1 \psi_n\psi_m x dx\right]\lambda_m^4$$

$$+\int_0^1 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d\psi_n}{dx} \cdot \frac{d}{dx} x \frac{d\psi_m}{dx} dx = 0 \qquad (6.65\,b)$$

两式相减，得

$$(\lambda_n^4 - \lambda_m^4)\left\{\frac{1}{2}\beta\psi_n(0)\psi_m(0) + \int_0^1 \psi_n\psi_m x dx\right\} = 0 \qquad (6.66)$$

由于$\lambda_n \neq \lambda_m$，所以就证明了（6.63 a ）。

现在决定（6.60）中的待定系数A_n。当$\tau = 0$时，$v(x)$除了$x = 0$那一点为撞击开始时的速度$\bar{v}_0$外，其它各点都等于零，亦即

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(x) - \frac{3\gamma R_i^2}{8h_i}(1 - x^2 + x^2\ln x)$$

$$= \begin{cases} \bar{v}_0, & 当\ x = 0 \\ 0, & 当\ 1 \geqslant x > 0 \end{cases} \qquad (6.67)$$

或可写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(0)-\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}=\bar{v}_0, \quad 当 \quad x=0 \qquad (6.68\text{a})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\psi_n(x)-\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}(1-x^2+2x^2\ln x)=0,$$

$$当\ 1 \geqslant x > 0 \qquad (6.68\text{b})$$

在（6.68 a）上乘$\frac{1}{2}\beta\psi_m(0)$，再在(6.68 b)上乘 $\psi_m(x)xdx$ 并积分，将结果相加，并利用（6.63 a、b）正则正交关系，即得

$$A_n=\frac{1}{2}\beta\left(\bar{v}_0+\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}\right)\psi_n(0)$$
$$+\int_0^1 \frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}(1-x^2+2x^2\ln x)x\psi_n(x)dx \qquad (6.69)$$

这就是（6.60）中 A_n 的表达式。这里除了（6.61）式在（6.62）条件下的特征值问题外，一切求解在形式上都已完成了。

现在让我们研究（6.61 a）的解，即

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi}{dx}\right]-\lambda^4\psi=0$$

$$(6.70)$$

的解，它可以写成

$$\psi=\psi^{(1)}+\psi^{(2)} \qquad (6.71)$$

其中 $\psi^{(1)}(x)$ 和 $\psi^{(2)}(x)$ 为下列贝塞耳方程之解

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi^{(1)}}{dx}+\lambda^2\psi^{(1)}=0,$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi^{(2)}}{dx}-\lambda^2\psi^{(2)}=0 \qquad (6.72)$$

（6.72）的解是已知的，即

$$\psi^{(1)}(x)=c_1J_0(\lambda x)+c_2Y_0(\lambda x) \qquad (6.73\text{a})$$

$$\psi^{(2)}(x)=c_3I_0(\lambda x)+c_4K_0(\lambda x) \qquad (6.73\text{b})$$

$J_0(\lambda x)$、$I_0(\lambda x)$、$Y_0(\lambda x)$、$K_0(\lambda x)$ 都是贝塞耳函数。于是我们有（6.70）的一般解

$$\psi(x)=c_1J_0(\lambda x)+c_2Y_0(\lambda x)+c_3I_0(\lambda x)+c_4K_0(\lambda x) \quad (6.74)$$

现在可用（6.61 b）、（6.62 a、 b、 c）四个条件来给出决定 c_1、c_2、c_3、c_4四个常数的方程：

$$-(c_1+c_2)\frac{1}{2}\beta\lambda^2=\frac{\pi}{2}c_4+c_2 \quad (6.75\text{a})$$

$$c_2-\frac{\pi}{2}c_4=0 \quad (6.75\text{b})$$

$$c_1J_0(\lambda)+c_2Y_0(\lambda)+c_3I_0(\lambda)+c_4K_0(\lambda)=0 \quad (6.75\text{c})$$

$$c_1J_0'(\lambda)+c_2Y_0'(\lambda)+c_3I_0'(\lambda)+c_4K_0'(\lambda)=0 \quad (6.75\text{d})$$

消去 c_1、c_2、c_3、c_4，得决定 λ 的方程（特征值方程）

$$I_0(\lambda)J_1(\lambda)+J_0(\lambda)I_1(\lambda)-\frac{1}{4}\beta\lambda^2\Big\{\Big[Y_0(\lambda)+\frac{2}{\pi}K_0(\lambda)\Big][J_1(\lambda)+I_1(\lambda)]+\Big[Y_1(\lambda)+\frac{2}{\pi}K_1(\lambda)\Big][J_0(\lambda)-I_0(\lambda)]\Big\}=0 \quad (6.76)$$

而（6.74）则可以写成

$$\psi_n(x)=\frac{1}{2}[J_0(\lambda_nx)+I_0(\lambda_nx)]-\frac{1}{2}\alpha_n[J_0(\lambda_nx)+I_0(\lambda_nx)]-\frac{1}{4}\beta\lambda_n^2\Big[Y_0(\lambda_nx)+\frac{2}{\pi}K_0(\lambda_nx)\Big] \quad (6.77)$$

其中 λ_n 为（6.76）的特征值解，而 α_n 为

$$\alpha_n=\frac{J_0(\lambda_n)+I_0(\lambda_n)-\frac{1}{2}\beta\lambda_n^2\Big[Y_0(\lambda_n)+\frac{2}{\pi}K_0(\lambda_n)\Big]}{J_0(\lambda_n)-I_0(\lambda_n)} \quad (6.78)$$

$\lambda_n(\beta)$ 和 β 有关，见图6-5。

（6.77）所给出的 $\psi_n(x)$ 并不满足正则条件（6.63 b）。所以，我们将从（6.68 a、 b）直接决定 A_n，于是（6.69）可以写成〔注意 $\psi_n(0)=1$〕，

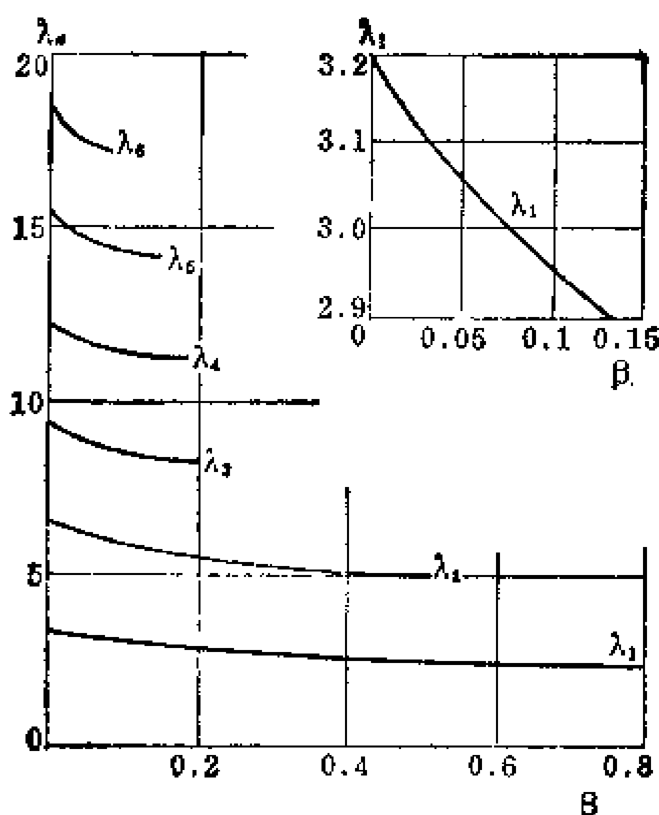


图6-5 特征值λ_n和质量比 β 的关系

$$A_nN_n=\frac{1}{2}\beta\left(\bar{v}_0+\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}\right)+\int_0^1\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}(1-x^2+2x^2\ln x)x\psi_n(x)dx \tag{6.79}$$

其中 N_n 为

$$N_n=\frac{1}{2}\beta+\int_0^1\psi_n(x)\psi_n(x)xdx \tag{6.80}$$

这就求得了全部的解：

$$v(x,\ \tau)=\frac{1}{2}\beta\bar{v}_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x)}{N_n}e^{-\lambda_n^4\tau}-\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}(1-x^2+2x^2\ln x)+\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\beta+\int_0^1(1-x^2+2x^2\ln x)\psi_n(x)xdx\right]\frac{\psi_n(x)}{N_n}e^{-\lambda_n^4\tau} \tag{6.81}$$

从图6-5中可以看到，特征值λ 约为3，λ_2约为6；λ_3约为9等。而且λ_n出现在$e^{-\lambda_n^4\tau}$指数中。因此，在时间略长一些以后，只有第一个特征值的有关项是最重要的，其它各项都可以略去不计。

为此，我们提出一个简单的能量近似法。设（6.55）的近似解可以写成

$$v(x,\tau)=A\psi(x)e^{-\lambda^4\tau}-\frac{3\gamma R_i^2}{8h_i}(1-x^2+2x^2\ln x) \tag{6.82}$$

把（6.82）代入（6.55 a、b），得

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi}{dx}\right]-\lambda^4\psi=0 \tag{6.83 a}$$

$$\mathscr{L}\mathrm{im}_{x\to0}\; x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi}{dx}\right]=\frac{1}{2}\lambda^4\beta\psi(0) \tag{6.83 b}$$

边界条件为

$$x=0,\quad \psi\text{有限} \tag{6.83 c}$$

$$x=1,\quad \psi=0 \tag{6.83 d}$$

$$x=1,\quad \frac{d\psi}{dx}=0 \tag{6.83 e}$$

在（6.83 a）上乘$\delta\psi x dx$，并积分，得

$$\delta U=\int_0^1\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{d\psi}{dx}\right]\delta\psi dx$$
$$-\lambda^4\int_0^1\psi\delta\psi x dx=0 \tag{6.84}$$

通过分部积分，并使用（6.83 b、c、d、e）诸边界条件，得

$$U=-\frac{\lambda^4\beta}{4}\psi_0^2(0)+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}x\frac{d\psi}{dx}\right)^2dx$$
$$-\frac{1}{2}\lambda^4\int_0^1\psi^2(x)x dx \tag{6.85 a}$$

$$\delta U=0 \tag{6.85 b}$$

首先，让我们取

$$\psi(x)=A(1-x^2)^2 \tag{6.86}$$

代入（6.85），得

$$\lambda^4=\frac{\frac{320}{3}}{1+5\beta} \tag{6.87}$$

当 $\beta=0$ 时，$\lambda=\left(\frac{320}{3}\right)^{1/4}=3.214$，和图6-5相比，似属过大。

设取

$$\psi(x)=A(1-x^2+2x^2\ln x) \tag{6.88}$$

代入(6.85)，得

$$\lambda^4=\frac{\frac{864}{7}}{1+\frac{54}{7}\beta} \tag{6.89}$$

当 $\beta=0$ 时，$\lambda=\left(\frac{864}{7}\right)^{1/4}=3.333$，也是过大。

为了求得更好的近似，取

$$\psi=A(1-x^2)^2+B(1-x^2+2x^2\ln x) \tag{6.90}$$

代入(6.85)，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial A}=0,\ &\left[\frac{\lambda^4\beta}{4}\left(1+\frac{1}{5\beta}\right)-\frac{16}{3}\right]A\\&+\left[\frac{\lambda^4\beta}{4}\left(1+\frac{23}{144\beta}\right)-4\right]B=0\\\frac{\partial U}{\partial B}=0,\ &\left[\frac{\lambda^4\beta}{4}\left(1+\frac{23}{144\beta}\right)-4\right]A\\&+\left[\frac{\lambda^4\beta}{4}\left(1+\frac{7}{54\beta}\right)-4\right]B=0\end{aligned}\right\} \tag{6.91}$$

消去A，B得

$$\frac{\lambda^8\beta^2}{16}\left(\frac{11}{1080\beta}+\frac{43}{103680\beta^2}\right)-\frac{\lambda^4\beta}{4}\left(\frac{4}{3}+\frac{173}{810\beta}\right)+\frac{16}{3}=0 \tag{6.92}$$

当$\beta=0$时，有

$$\frac{43}{103680}\left(\frac{\lambda_0^8}{16}\right)-\frac{173}{810}\left(\frac{\lambda_0^4}{4}\right)+\frac{16}{3}=0 \qquad (6.93)$$

得解(开方号前取负值)

$$\frac{1}{4}\lambda_0^4=26.316\approx\frac{658}{25} \qquad (6.94)$$

设

$$\frac{1}{4}\lambda^4=\frac{\lambda_0^4}{4}(1+\beta f_1) \qquad (6.95)$$

代入 (6.92)，略去高次β项，得

$$f_1=-\frac{\frac{11}{1080}\frac{\lambda_0^4}{4}-\frac{4}{3}}{\frac{43}{51840}\frac{\lambda_0^4}{4}-\frac{173}{810}}=-\frac{690288}{124253}=-\frac{767}{138} \qquad (6.96)$$

于是，(6.92) 的解可以写成

$$\frac{1}{4}\lambda^4=\frac{628}{25}\left(1-\frac{767}{138}\beta\right)\approx\frac{\frac{628}{25}}{1+\frac{767}{138}\beta} \qquad (6.97)$$

现在，把 (6.97) 代入 (6.91) 第一式，得

$$A=\frac{55}{1392}\,\frac{1+\frac{59784}{143}\beta}{1+\frac{29305}{2001}\beta}B \qquad (6.98)$$

所以，(6.90)的解为

$$\psi(x)=B\left\{1-x^2+2x^2\ln x+\frac{55}{1392}\,\frac{1+\frac{59784}{143}\beta}{1+\frac{29305}{2001}\beta}(1-x^2)^2\right\} \qquad (6.99)$$

而 (6.82) 可以写成

$$v(x,\tau)=\bar{A}\left\{1-x^2+2x^2\ln x+\frac{55}{1392}\ \frac{1+\dfrac{59784}{143}\beta}{1+\dfrac{29305}{2001}\beta}(1-x^2)^2\right\}$$

$$\times e^{-\lambda^4\tau}-\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}(1-x^2+2x^2\ln x) \tag{6.100}$$

置 $x=0$，即得

$$v(0,\tau)=\bar{A}\left\{1+\frac{55}{1392}\ \frac{\left(1+\dfrac{59784}{143}\beta\right)}{\left(1+\dfrac{29305}{2001}\beta\right)}\right\}e^{-\lambda^4\tau}-\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t} \tag{6.101}$$

在撞击开始时，$\tau=0$，$v(0,0)=\bar{v}_0$，于是

$$\bar{A}=\left(\bar{v}_0+\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}\right)\left[1-\frac{55}{1393}\ \frac{1+\dfrac{59784}{143}\beta}{1+\dfrac{29305}{2001}\beta}\right]^{-1} \tag{6.102}$$

从（6.101）、（6.102）中消去 $\bar{A}$，得

$$v(0,\tau)=\left(\bar{v}_0+\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t}\right)e^{-\lambda^4\tau}-\frac{3\gamma R_t^2}{8h_t} \tag{6.103}$$

当撞击结束时，$v(0,\tau_1)=0$，从（6.103）求得撞击结束的时间为

$$\tau_1=t_1\left(\frac{2M_Y}{3\sqrt{3\gamma\rho_t R_t^4}}\right)=\frac{1}{\lambda^4}\ln\left(1+\frac{8h_t}{3\gamma R_t^2}\bar{v}_0\right) \tag{6.104}$$

或

$$t_1=\frac{19175}{231196}\ \frac{\sqrt{3}\gamma R_t^2 m}{\pi h_t M_Y}\left(1+\frac{138\pi R_t^2 h_t\rho_t}{767m}\right)\ln\left(1+\frac{8h_t}{3\gamma R_t^2}\bar{v}_0\right) \tag{6.105}$$

将（6.103）对时间积分，得靶板中心位移 $w(0,\tau)$，并取开始时的位移为 $w(0,0)=0$，于是

$$w(0,\tau)=\frac{3\sqrt{3}\gamma\rho_t R_t^4}{2M_Y}\int_0^\tau w(0,\tau)d\tau$$

$$=\frac{9\sqrt{3}\gamma^2\rho_t R_t^6}{16M_Y h_t}\left\{\frac{1}{\lambda^4}\left(1+\frac{8h_t}{3\gamma R_t^2}\bar{v}_0\right)(1-e^{-\lambda^4\tau})-\tau\right\} \tag{6.106}$$

靶板中心的最大位移为$w(0,\tau_1)$

$$w(0,\tau_1)=\frac{9\sqrt{3}\gamma^2\rho_t R_t^6}{16M_Y h_t\lambda^4}\left\{\frac{8h_t}{3\gamma R_t^2}\bar{v}_0-\ln\left(1+\frac{8h_t}{3\gamma R_t^2}\bar{v}_0\right)\right\} \tag{6.107}$$

其中λ^4见（6.97），或可写成

$$w(0,\tau_1)=\frac{\sqrt{3}\gamma^2 R_t^4 m}{30\pi M_Y h_t^2}\left(1+\frac{138\pi R_t^2\rho_t h_t}{767m}\right)$$

$$\times\left\{\frac{8h_t\bar{v}_0}{3\gamma R_t^2}-\ln\left(1+\frac{8h_t}{3\gamma R_t^2}\bar{v}_0\right)\right\} \tag{6.108}$$

以上$\bar{v}_0$是撞击以后弹体靶体的共同速度，还不是撞击速度v_0，v_0和$\bar{v}_0$之间的关系可以用撞击前后的动量守恒定律求得。设在撞击一开始，靶体各点的初始速度为$\bar{v}_0 f(x)$，于是，动量守恒定律为

$$mv_0=m\bar{v}_0+2\pi\rho_t h_t R_t^2\bar{v}_0\int_0^1 f(x)xdx \tag{6.109}$$

在这里，我们可以近似地取

$$f(x)=1-x^2+2x^2\ln x \tag{6.109a}$$

于是，我们有

$$\bar{v}_0=\frac{v_0}{1+\dfrac{\pi\rho_t h_t R_t^2}{4m}}=\frac{v_0}{1+\dfrac{1}{4\beta}}=\frac{4\beta}{1+4\beta}v_0 \tag{6.110}$$

这些理论结果和实验所得[6-28]很接近。实验所用的靶板是低碳钢板，厚6.35毫米，四边夹紧，直径为101.6毫米。弹体有两种：一种弹体重10克，直径为10.52毫米，材料为低碳钢，撞击

速度从91.5～595米/秒；还有一种弹体是枪弹，重31克，直径相同，速度从204～292米/秒。M_Y 是根据 σ_{YT} 为 24500 和 26700 牛顿/厘米^{2}估计的，粘塑性松弛时间是2.5毫秒。

对于较薄的靶板而言，上述理论并不理想，为了便于和实验比较，我们还应该有精确解。本题的精确解可以用板的位移速度的拉普拉斯变换求得[6-26]。其结果如下：中心位移为

$$w(0, t)=\left(\bar{v}_0-\frac{4\pi M_Y}{\sqrt{3}mb^{*2}}\right)\left\{\frac{1}{b^{*2}}e^{b^{*2}t}\mathrm{erfc}(b^*t^{1/2})\right.$$

$$\left.+\frac{2}{b^*}\sqrt{\frac{t}{\pi}}-\frac{1}{b^{*2}}\right\}+\frac{4\pi M_Y}{\sqrt{3}mb^{*2}}t$$

$$-\frac{16\sqrt{\pi}M_Y}{3\sqrt{3}mb^*}t^{3/2} \tag{6.111}$$

其中

$$b^{*2}=\frac{512\rho_t h_t^2 M_Y}{3\sqrt{3}m^2\gamma} \tag{6.112}$$

而 erfc 是补余误差函数。撞击点的速度和加速度可以从(6.111)的导数中求得。板中心的永久变形可以先从 $v(0, t_1)=0$ 的条件求得时间 t_1，它满足下述方程

$$\left(\bar{v}_0-\frac{4\pi M_Y}{\sqrt{3}mb^{*2}}\right)e^{b^{*2}t_1}\mathrm{erfc}(b^*t_1^{1/2})$$

$$+\frac{4\pi M_Y}{\sqrt{3}mb^{*2}}\left[1-2b^*\left(\frac{t_1}{\pi}\right)^{1/2}\right]=0 \tag{6.113}$$

然后求得 $t=t_1$时（6.111）的值，它和薄铝板和薄钢板的实验结果相比，理论值比实验值约大三倍。这是因为在理论分析中略去了薄膜力所引起的[6-26]。

§6.6 未击穿的靶板变形理论之三
——弹性粘塑性靶板大挠度理论

拜纳-普隆开脱(1971)[6-29]曾用大挠度理论研究了未击穿的

薄靶板弹塑性撞击动力学。他们根据不同变形的传播速度把靶板分为五个区域（图6-6）。

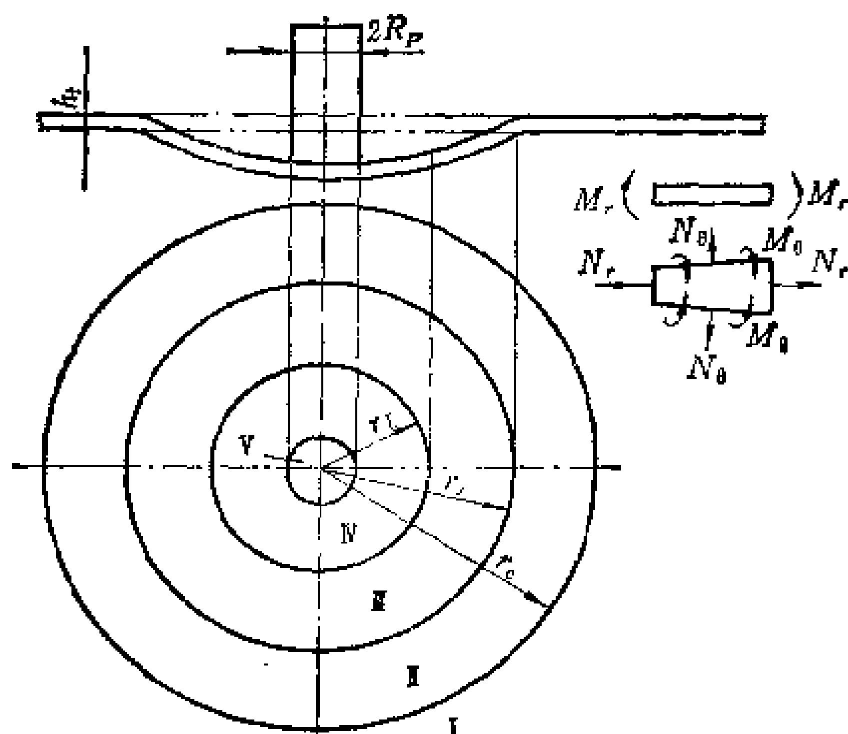


图6-6　薄板靶在钝头弹体撞击下弹塑性变形的分区模式

当薄板受到撞击后，各种弹塑性变形，以不同的速度向外传播：

（1）c_D 弹性压缩波的速度。这种弹性变形不产生横向挠度，速度在各种变形波中最大。

（2）c_s 弹性剪力波的速度。这种弹性变形产生横向挠度，而且是大挠度，速度小于弹性压缩波速，但大于塑性波速。

（3）c_w 塑性变形波的速度。这种塑性变形产生永久性横向挠度，而且是大挠度，速度最慢。

亦即，有

$$c_w < c_s < c_D \qquad (6.114)$$

根据不同变形的传播速度，可把薄靶板在撞击后的变形，从

远到近分为五个区域：

（1）区域Ⅰ　$r_e < r < \infty$，撞击影响尚未到达的区域。

$$r_e = R_P + c_D t \qquad (6.115a)$$

其中 R_P 为钝头弹体半径；c_D 为弹性压缩波速；t 为撞击开始后的时间；r_e 为撞击开始后在 t 时间内，弹性压缩波到达区域的半径。

（2）区域Ⅱ　$r_s \leqslant r \leqslant r_e$，仅只有弹性压缩波通过的区域。$r_s$ 为发生横向弹性位移的剪力波到达区域的半径

$$r_s = R_P + c_s t \qquad (6.115b)$$

在这个区域内，板靶虽已感到撞击的影响，但这种影响不产生弹性横向位移，从而没有横向挠度，只有在板内产生薄膜拉伸压缩变形。这对于靶板的盘状凹陷和隆起现象无直接影响，所以在这个区域内，我们有平面弹性动力学问题。

（3）区域Ⅲ　$r_B \leqslant r \leqslant r_s$，弹性弯曲区域。在这个区域内，靶板既产生板内拉伸、压缩的薄膜应力，也产生横向挠度的弯曲应力。但所有变形都是弹性的，没有塑性的。所以，在这个区域内的动力学方程，应该是以冯卡门大挠度圆薄板方程为基础的动力学方程。r_B 为塑性波到达区域的半径。

$$r_B = R_P + c_w t \qquad (6.115c)$$

（4）区域Ⅳ　$R_P \leqslant r \leqslant r_B$，塑性弯曲区域。在这个区域内，板内各点都已进入塑性阶段，其中 R_P 为弹体半径。

（5）区域Ⅴ　$0 \leqslant r \leqslant R_P$，是钝头弹体直接接触下的区域，它和弹体一起运动。

为了列出统一的方程式，让我们引进下列诸无量纲量：

$$\frac{r}{R_P} = \xi \text{（无量纲径向坐标）} \qquad (6.116a)$$

$$t\frac{v_D}{R_P} = \tau \text{（无量纲时间）} \qquad (6.116b)$$

$$\frac{uR_P}{h_i^2} = U \text{（无量纲径向位移）} \qquad (6.116c)$$

$$\frac{w}{h_t}=W（无量纲垂直横向位移） \tag{6.116d}$$

其中 v_0 为撞击速度。于是，我们在各个区域内将有不同的运动方程。

（1）区域Ⅰ $\xi_e\leqslant\xi<\infty$，撞击影响尚未到达的区域，其中

$$\left.\begin{aligned}&\xi_e=1+s_D\tau\\&s_D=\frac{c_D}{v_0}（无量纲弹性压缩波速度）\end{aligned}\right\} \tag{6.117}$$

这里并无任何位移，故

$$U\equiv 0,\ W\equiv 0 \tag{6.118}$$

（2）区域Ⅱ $\xi_r\leqslant\xi\leqslant\xi_e$，仅有弹性压缩、拉伸变形的区域，其中

$$\left.\begin{aligned}&\xi_r=1+s_r\tau\\&s_r=\frac{c_t}{v_0}（无量纲弹性横向位移的剪力波的速度）\end{aligned}\right\} \tag{6.119}$$

这里只有平面内的板内薄膜力 N_r、N_θ，它们和平面内径向位移 $u(r,t)$的惯性力形成动力平衡。所以，其运动方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN_r)-\frac{N_\theta}{r}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.120}$$

N_r、N_θ 和 u 的关系为

$$\left.\begin{aligned}&N_r=\frac{Eh_t}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\frac{u}{r}\right)\\&N_\theta=\frac{Eh_t}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r}+\nu\frac{\partial u}{\partial r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6.121}$$

其中 E 为杨氏模量；ν 为泊桑比。把（6.121）代入（6.120），得 $u(r,t)$的运动方程式：

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)=\frac{1}{c_D^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad c^2_D=\frac{E}{\rho_t(1-\nu^2)} \tag{6.122}$$

用无量纲量表示，可以写成

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi U)=\frac{1}{s_D^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad s_D^2=\frac{E}{\rho_t v_0^2(1-\nu^2)}$$

(6.123)

在本区域内，没有横向位移，即有

$$W=0 \tag{6.124}$$

(6.123)、(6.124)为决定U、W的两个方程。

（3）区域Ⅲ $\xi_B \leqslant \xi \leqslant \xi_t$，弹性弯曲区域。在本区域内，既有平面的板内薄膜力$N_r$、$N_\theta$，也有弯曲力矩$M_r$、$M_\theta$的作用。在$w$方向和$u$方向的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial M_r}{\partial r}+M_r-M_\theta+r N_r \frac{\partial w}{\partial r}\right]=\rho_t h_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r N_r)-\frac{N_\theta}{r}=\rho_t h_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}$$

(6.125)

N_r、N_θ、M_r、M_θ和位移u、w的关系，应该按大挠度理论处理，它们是[6-30]

$$N_r=\frac{E h_t}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\nu \frac{u}{r}\right] \tag{6.126a}$$

$$N_\theta=\frac{E h_t}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r}+\nu \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right] \tag{6.126b}$$

$$M_r=-\frac{E h_t^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] \tag{6.126c}$$

$$M_\theta=-\frac{E h_t^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] \tag{6.126d}$$

把（6.126a、b、c、d）代入（6.125），得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left\{-r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r}+\frac{12}{h_t^2} r \frac{\partial w}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\nu \frac{u}{r}\right]\right\}=12(1-\nu^2) \frac{\rho_t}{E h_t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(6.127a)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1-\nu}{2r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2$$

$$=\frac{1}{c_D^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.127 b}$$

化为无量纲形式，(6.127 a、b)可以写成

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{-\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi\frac{\partial W}{\partial \xi}+12\xi\frac{\partial W}{\partial \xi}\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2+\nu\frac{U}{\xi}\right]\right\}=\frac{1}{s_s^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \tag{6.128 a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi U)+\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\frac{1-\nu}{2\xi}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2$$

$$=\frac{1}{s_D^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \tag{6.128 b}$$

其中

$$s_s=\frac{c_s}{v_0} \tag{6.129 a}$$

$$s_D=\frac{c_D}{v_0} \tag{6.129 b}$$

$$c_s^2=\frac{Eh_t^3}{12(1-\nu^2)R_t^2\rho_t} \tag{6.129 c}$$

$$c_D^2=\frac{E}{\rho_t(1-\nu^2)} \tag{6.129 d}$$

(6.128 a、b) 为在 $\xi_B\leqslant\xi\leqslant\xi_s$ 中求解 $W(\xi,\tau)$, $U(\xi,\tau)$的两个方程，其中 $\xi_B=1+c_B\tau$, $\xi_s=1+c_s\tau$。

（4）区域Ⅳ　塑性区域，$1\leqslant\xi\leqslant\xi_B$。在这个区域中，全部进入塑性状态，而且我们可以假定是一种粘塑性状态。

粘塑性状态的本构方程可以写成

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r}-z\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2}=\frac{\gamma}{\sqrt{3}\,\sigma_{YT}}\left[2\sigma_r-\sigma_\theta-(2\sigma_{Yr}-\sigma_{Y\theta})\right]$$

$$\tag{6.130 a}$$

$$\frac{\dot{u}}{r}-z\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}=\frac{\gamma}{\sqrt{3}\,\sigma_{YT}}[2\sigma_\theta-\sigma_r-(2\sigma_{Y\theta}-\sigma_{Yr})]$$

(6.130 b)

其中 σ_{Yr}、$\sigma_{Y\theta}$ 满足冯密西斯屈服条件

$$\sigma^2_{Yr}-\sigma_{Yr}\sigma_{Y\theta}+\sigma^2_{Y\theta}=\sigma^2_{YT} \tag{6.131}$$

γ 为粘塑性松弛时间的倒数，$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}$，$\dot{w}=\frac{\partial w}{\partial t}$；从(6.130 a、b）解出 σ_r、σ_θ，得

$$\sigma_r-\sigma_{Yr}=\frac{2\sigma_{YT}}{\sqrt{3}\,\gamma}\left\{\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{2r}-z\left(\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2}+\frac{1}{2r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}\right)\right\}$$

(6.132 a)

$$\sigma_\theta-\sigma_{Y\theta}=\frac{2\sigma_{YT}}{\sqrt{3}\,\gamma}\left\{\frac{\dot{u}}{r}+\frac{1}{2}\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}-z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2}\right)\right\}$$

(6.132 b)

积分，有

$$N_r=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\sigma_r dz=N_{Yr}+\frac{2\sigma_{YT}h_t}{\sqrt{3}\,\gamma}\left\{\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{2r}\right\}$$

(6.133 a)

$$N_\theta=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\sigma_\theta dz=N_{Y\theta}+\frac{2\sigma_{YT}h_t}{\sqrt{3}\,\gamma}\left\{\frac{\dot{u}}{r}+\frac{1}{2}\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}\right\}$$

(6.133 b)

$$M_r=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\sigma_r z dz=-\frac{\sigma_{YT}h_t^3}{6\sqrt{3}\,\gamma}\left(\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2}+\frac{1}{2r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}\right)$$

(6.133 c)

$$M_\theta=\int_{-h_t/2}^{h_t/2}\sigma_\theta z dz=-\frac{\sigma_{YT}h_t^3}{6\sqrt{3}\,\gamma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2}\right)$$

(6.133 d)

其中 N_{Yr}、$N_{Y\theta}$ 为

$$N_{Yr}=h_t\sigma_{Yr},\quad N_{Y\theta}=h_t\sigma_{Y\theta} \tag{6.134}$$

它们满足

$$N^2_{Yr}-N_{Yr}N_{Y\theta}+N^2_{Y\theta}=N^2_{YT}=\sigma^2_{YT}h_t^2 \tag{6.135}$$

代入(6.125)

$$-\frac{\sigma_{YT}h_t^3}{6\sqrt{3}\,\gamma}\nabla^2\nabla^2\dot{w}+N_{Yr}\,r\,\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2\sigma_{YT}h_t}{\sqrt{3}\,\gamma}\,r\,\frac{\partial w}{\partial r}\left(\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{2r}\right)=\rho_t h_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{6.136 a}$$

$$\frac{2\sigma_{YT}h_t}{\sqrt{3}\,\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{u})\right\}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN_{Yr})-\frac{N_{Y\theta}}{r}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.136 b}$$

对轴对称圆薄板在静力平衡屈服时，$N_{Yr}=N_{Y\theta}$，代入(6.135)，得

$$N_{Yr}=N_{Y\theta}=\sigma_{YT}h_t \tag{6.137}$$

于是（6.136 a、b）可以简化为

$$-\frac{\sigma_{YT}h_t^3}{6\sqrt{3}\,\gamma}\nabla^2\nabla^2\dot{w}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\sigma_{YT}h_t r\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2\sigma_{YT}h_t}{\sqrt{3}\,\gamma}\,r\,\frac{\partial w}{\partial r}\left(\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{2r}\right)\right\}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{6.138 a}$$

$$\frac{2\sigma_{YT}h_t}{\sqrt{3}\,\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{u})\right\}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.138 b}$$

把它无量纲化，则（6.138）可以写成

$$-s_1\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial W}{\partial\tau}+12s_1\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi\frac{\partial W}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)\right]+s_3^2\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial W}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2} \tag{6.139 a}$$

$$s_2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \tag{6.139 b}$$

其中

$$s_1=\frac{c_1}{v_0}, \quad c_1=\frac{\sqrt{3}\,\sigma_{YT}h_t^2}{18rR_p^3\rho_t} \tag{6.140 a}$$

$$s_2=\frac{c_2}{v_0}, \quad c_2=\frac{2\sigma_{YT}}{\sqrt{3}\,\gamma R_p\rho_t} \tag{6.140 b}$$

$$s_3=\frac{c_3}{v_0}, \quad c_3=\sqrt{\frac{\sigma_{YT}}{\rho_t}} \tag{6.140 c}$$

塑性区的边界由c_1、c_2、c_3中的最大值决定，亦即

$$c_w=\max(c_1, c_2, c_3) \tag{6.141}$$

在一般情况下，c_3为最大，所以，有时直接用

$$c_w=c_3=\sqrt{\frac{\sigma_{YT}}{\rho_t}} \tag{6.142}$$

亦即

$$\xi_B=1+\frac{c_w}{v_0}\tau=1+s_w\tau, \quad s_w=\frac{c_w}{v_0} \tag{6.143}$$

（5）区域Ⅴ　接触区域，$0\leqslant\xi\leqslant1$。在这个区域内，弹体m和靶元$\rho_t h_t\pi R_p^2$一起运动，其位移为$w_0(t)$，惯性力为$(m+\rho_t h_t\pi R_p^2)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$（向上）。约束运动的力有两种，其一为靶元圆周上所受剪力$Q_{R_p}2\pi R_p$（向上），另一为薄膜力$(N_r)_{R_p}$的向上合力，它是$-2\pi R_p(N_r)_{R_p}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{R_p}$（向上），见图6-7。

动力平衡时，有

$$2\pi R_p\left[Q_{R_p}+(N_r)_{R_p}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{R_p}\right]=(m+\rho_t h_t\pi R_p^2)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{6.144}$$

其中

$$Q_{R_p}=\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_r)-\frac{1}{r}M_\theta\right\}_{r=R_p} \tag{6.145}$$

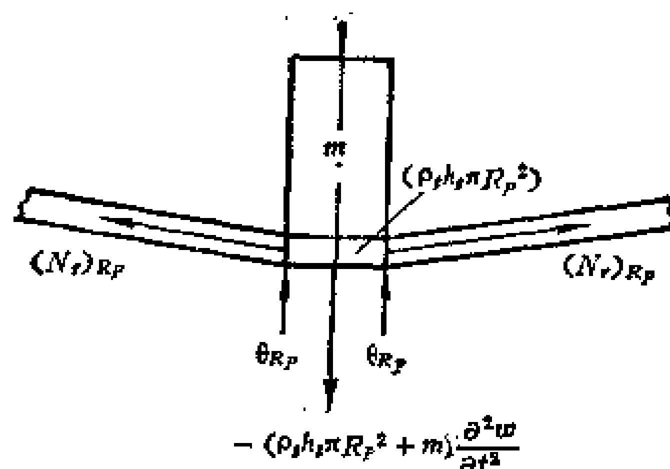


图6-7 弹体的动力平衡

把（6.133）代入（6.144）、（6.145），并无量纲化，求得 W_0 的运动方程：

$$-s_{P_1}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial W}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\xi=1}$$

$$+12s_{P_1}\xi\frac{\partial W}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\xi=1}$$

$$+s_{P_3}^2\frac{\partial W}{\partial\xi}\Bigg|_{\xi=1}=\frac{\partial^2 W_0}{\partial\tau^2}\quad(\xi=1)\qquad(6.146)$$

除此而外，还有(6.139)

$$s_2\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial U}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}\quad(0\leqslant\xi\leqslant1)\qquad(6.147)$$

(6.147) 为在 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 时求 $U(\xi,\tau)$ 的方程式，(6.146) 为在 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 时求 $W(\xi,\tau)$ 的方程式。但注意 $W(\xi,\tau)=W(1,\tau)=W_0(\tau)$，(6.146)、(6.147) 中的 s_2 见(6.140 b)，s_{P_1}、s_{P_3} 分别为

$$s_{P_1}=\frac{\pi\sigma_{YT}h_t^3}{3\sqrt{3}\,\gamma v_0(m+\rho_t h_t\pi R_P^2)R_P}\qquad(6.148\text{ a})$$

$$s_{P_3}^2=\frac{2\pi R_P^2 h_t\sigma_{YT}}{v_0^2(m+\rho_t h_t\pi R_P^2)}\qquad(6.148\text{ b})$$

最后，还应该有弹体和靶元的起始运动条件，其一为

$$W(\xi,0)=0,\quad 0\leqslant\xi\leqslant\infty\qquad(6.149\text{ a})$$

和根据撞击的动量守恒定律

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=\frac{mR_P}{(m+\pi\rho_t h_t R_P^2)h_t},\qquad 0\leqslant\xi\leqslant 1 \qquad (6.149\text{b})$$

$$=0\qquad\qquad ,\ 1\leqslant\xi\leqslant\infty \qquad (6.149\text{c})$$

还有关于$U(\xi,\tau)$的起始条件

$$U(\xi,0)=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=0\quad (0\leqslant\xi\leqslant\infty)\quad (6.150)$$

在积分过程中，还有关于W、U在各区域交界处的连续条件，即

$$\frac{\partial W}{\partial \tau},\ \frac{\partial U}{\partial \tau},\ W,\ \frac{\partial W}{\partial \xi},\ M_r,\ Q,\ U,\ N_r\text{连续}\qquad (6.151)$$

积分运算可以用有限差分法或有限元法进行。

拜纳-普隆开脱[6-26]并没有深入进行这方面的工作，但从实验的感性知识出发，考虑到一些简化的过程。他们用质量为15～100克、直径为12.7毫米、初速为25.4～102米/秒的刚性弹体撞击厚度为0.64～4.8毫米的铝合金板。所得实验结果证明$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=R_p}$都在0.1～0.2之间，而且薄膜应力$N_r$的作用不大，于是，建议略去Ⅲ区的弹性变形，在Ⅳ区中略去弯矩的影响，也略去N_r中的增量的影响，亦即$s_t<s_3$，（6.139 a）可以写成

$$\frac{1}{\xi}\ \frac{\partial}{\partial \xi}\xi\frac{\partial W}{\partial \xi}=\frac{1}{s_3^2}\ \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}\qquad (6.152)$$

而初始条件和边界条件为

$$W(\xi,\tau)=D,\quad \xi>\xi_B \qquad (6.153\text{a})$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(\xi,\tau)=0,\quad \xi>\xi_B \qquad (6.153\text{b})$$

$$s_P^2\frac{\partial W}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2},\quad \xi=1 \qquad (16.153\text{c})$$

$$W(\xi,0)=0,\quad 1<\xi<\xi_B \qquad (6.153\text{d})$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\begin{cases}\dfrac{mR_P}{(m+\rho_t\pi h_t R_P^2)h_t} & \xi=1,\ \tau=0 \qquad (6.153\text{e})\\[2ex] 0 & 1\leqslant\xi\leqslant\xi_B,\ \tau=0 \qquad (6.153\text{f})\end{cases}$$

只要 σ_{YT} 值较大，或靶板较薄，这样简化计算所得的结果和实验结果比较符合。对于厚板和较小 σ_{YT} 的问题，弯矩就不能略去，这样的简略处理就不适当了。

§6.7 尼龙或其它织品的防弹衣撞击分析

对于单一纤维或丝绳的撞击分析，业已有很多工作，公认是成熟的研究成果[6-38~6-42]。还有人[6-45]对复合材料的制品，如环氧树脂为基体的Kelvar(PRD)-49纤维制成的丝绳进行了试验。

对于纤维织物的撞击理论很少[6-44,6-45,6-48,6-36]，但幸运的是〔6-36〕、〔6-45〕提供了撞击开始时几微秒间的清晰的照相记录，从而可以看到，织物在撞击后形成锥形，它和单纤维织物被撞击后形成V形是一致的。如果纤维的变形，促使弹体速度变为零，则弹体就击穿不了纤维织品。如果在弹体还没有减速到零时，纤维织品就破裂了，则弹体击穿防弹衣后，还有剩余速度而造成伤害。

斯密斯[6-40]曾给出了纤维在受横向撞击时的各种应力波的波速方程。图6-8为纤维在横向受弹体A撞击时的形状。弹体的速度为V_P。撞击引起两个应变的纵向波向相反方向传播，其速度为c。同时，还产生一种横向波，它的形状是倒V形；其基脚在P点，它以速度$\bar{c}$向两侧传播。在F点以外的纤维质点在t时尚未感到撞击。OF的距离为ct，对于未变形的质点而言，应变波速度c为

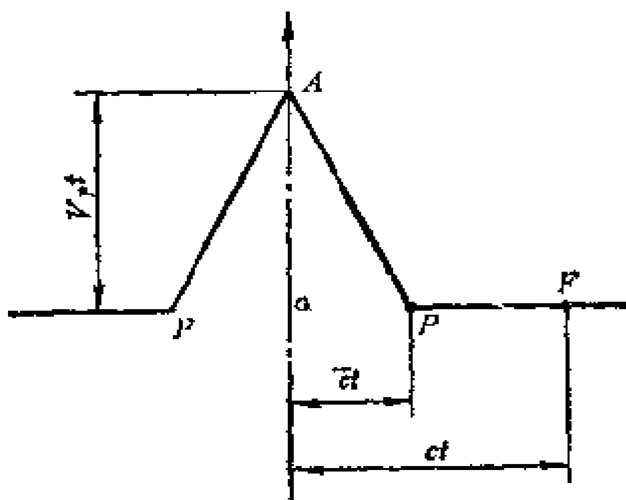


图6-8 水平纤维在A处受弹体的横向撞击

$$c=\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{\partial T}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0}}=\sqrt{\frac{T}{m\epsilon}} \qquad (6.154)$$

其中m为未变形的纤维单位长度的质量；$\left(\frac{\partial T}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0}$ 为纤维应力应变曲线的初始斜率。

在这个应变波通过以后，APF中质点开始往反方向收缩，收缩速度W和应变ϵ成正比根据文献〔6-40〕，它等于

$$W=c\epsilon \tag{6.155}$$

但当横向波到达这个质点时，这个质点的水平运动停止，突然开始以撞击速度V_p向上（即横向）运动。这种横向波向两侧移动的速度相对于未变形的质点而言为c_0，它和c的不同，只是由于质量不同，现在的质量是$m(1+\epsilon)$。

$$c_0=\sqrt{\frac{T}{m(1+\epsilon)}} \tag{6.156}$$

从观测者看来，横向波的前进速度$\bar{c}$应该是

$$\bar{c}=(1+\epsilon)c_0-W \tag{6.157}$$

从图6-8，我们有

$$OA=V_pt,\quad OP=\bar{c}t,\quad AP=(1+\epsilon)c_0t \tag{6.158}$$

所以，得

$$V_p=\sqrt{(1+\epsilon)^2c_0^2-[(1+\epsilon)c_0-W]^2} \tag{6.159}$$

最后，设T、ϵ是线性关系

$$T=mc^2\epsilon \tag{6.160}$$

从（6.156）、（6.157）、（6.159）式可以求得

$$c_0=c\sqrt{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \tag{6.161}$$

$$V_p=c\sqrt{\epsilon(1+\epsilon)-[\sqrt{\epsilon(1+\epsilon)}-\epsilon]^2} \tag{6.162a}$$

$$\bar{c}=c\{\sqrt{\epsilon(1+\epsilon)}-\epsilon\} \tag{6.162b}$$

最后一式在下面的分析中是有用的。

关于防弹布或织品而言，可以把倒V形推广为锥壳(图6-9)。锥壳在轴向荷载下的理论见〔6-47〕、〔6-48〕。设锥壳在$r=R_1$处

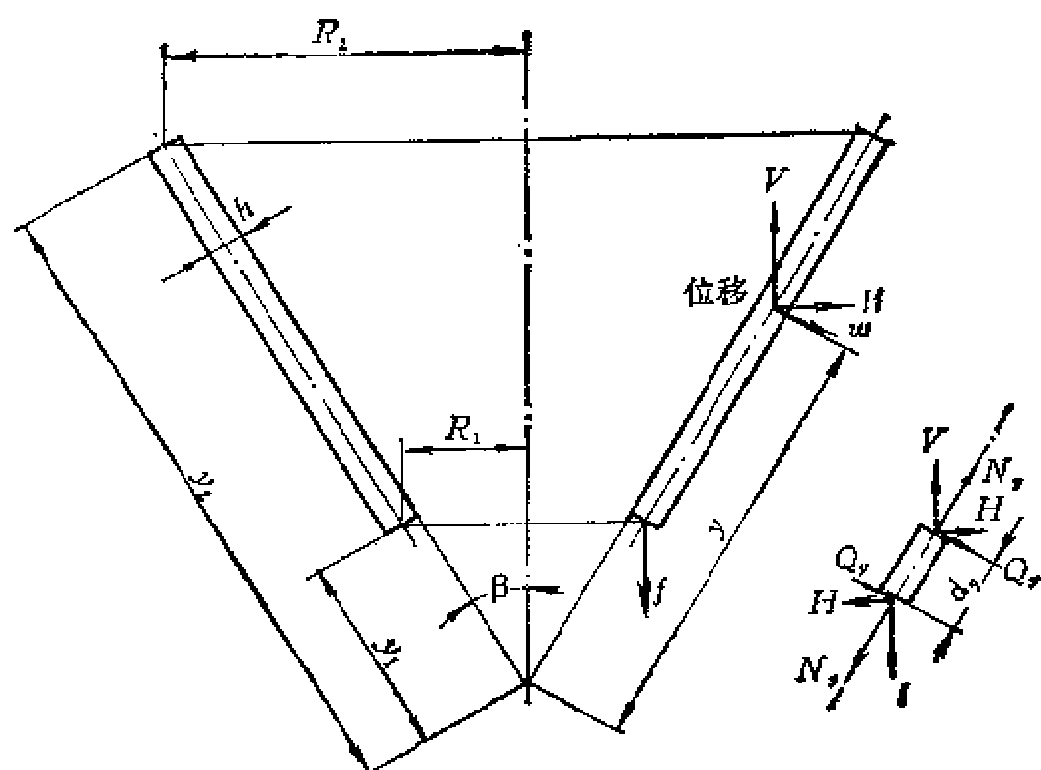


图6-9　锥壳符号及几何

受轴向力 f（单位长度的力），则整个问题可以化为薄膜理论问题，其结果为

$$H=\frac{R_1 f}{y\cos\beta} \tag{6.163a}$$

$$N_y=-\frac{R_1 f}{y\sin\beta\cos\beta} \tag{6.163b}$$

$$N_\theta=Q_y=0 \tag{6.163c}$$

变形为

$$\epsilon_y=\frac{R_1 f}{Eh\sin\beta\cos\beta}\cdot\frac{1}{y} \tag{6.164a}$$

$$w=-\frac{R_1 f}{Eh\cos^2\beta}\ln y \tag{6.164b}$$

$$\beta_y=-\frac{dw}{dy}=\frac{R_1 f}{Eh\cos^2\beta}\cdot\frac{1}{y} \tag{6.164c}$$

$$U=\frac{R_1 f}{Eh\cos^2\beta\sin\beta}\ln y+\text{const} \tag{6.164d}$$

如果规定$U(y_2)=0$，则

$$U=\frac{R_1 f}{Eh\sin\beta\cos^2\beta}\ln\frac{y}{y_2} \qquad (6.165)$$

最后，整个壳的总轴向位移为

$$U_{总}=U(y_2)-U(y_1)=\frac{R_1 f}{Eh\sin\beta\cos^2\beta}\ln\frac{y_2}{y_1} \qquad (6.166)$$

本式是$U_{总}$和轴向载荷f的关系式。这是一个有用的计算公式，既可以用来从载荷f计算总位移$U_{总}$，也可以从总位移$U_{总}$计算轴向载荷f。

下面是文荪和左卡斯(1975)[6-46]提出的用准静力的分析方法处理防弹布撞击问题的计算方案。如果在y_1处受轴力f，则根据静力平衡条件，任意截面$y=y_2$处的轴力$V(y_2)$应该是

$$V(y_2)=\frac{y_1}{y_2}f \qquad (6.167)$$

在动力学问题中，轴力f是造成原来的平面布变为锥形布的主要原因，轴力f实际上不是由$y=y_2$处的$V(y_2)$来和它平衡的，而是由纤维布的质量的轴向运动的惯性力所平衡的。但是纤维布的质量和弹体质量相比，小得很多，因此，我们完全可以略去惯性力，采用准静力学的分析方法。

图6-10为纤维布受弹体撞击后在时间t时的形状。$U_{总}$为纤维布的总位移；R_1为钝头弹体的半径；R_2是横向波在t时达到的距离；$\bar{c}$为横向波的前进速度，它和应变有关（6.162d），所以也和时间有关。

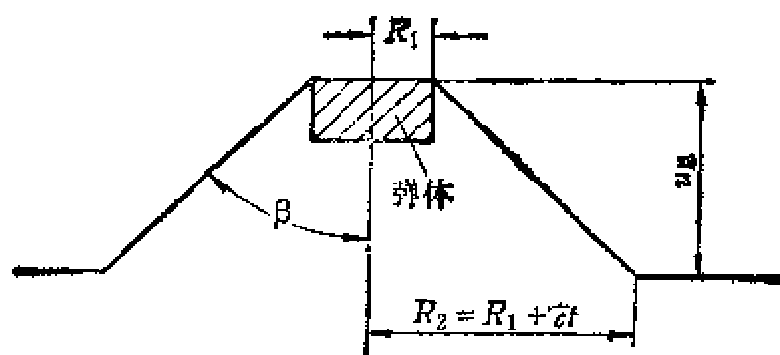


图6-10　防弹布受弹体撞击后的形状

在弹体的撞击速度 v_p 给出后，在某一 Δt 时间后，应该有位移 $U_{总}=v_p\Delta t$，从（6.166）可计算出轴向力 f。而 $\frac{2\pi R_1 f}{M}$ 为弹体的减速度 a_p。从（6.164）第一式,计算在 $r=R_1(y=y_1)$处的最大应变

$$\epsilon_y=\frac{R_1 f}{Eh\sin\beta\cos\beta}\cdot\frac{1}{y_1} \tag{6.168}$$

把（6.166)、(6.168）合在一起，得

$$\epsilon_y(y_1)=\epsilon_{y(max)}=\frac{U_{总}\cos\beta}{y_1\ln(y_2/y_1)} \tag{6.169}$$

这种计算从表面上看来有一困难,即应变和应变率变化很大,所以纤维的杨氏模量E也是随着时间变化的。如果要顺利进行计算，我们首先要求有范围相当宽广的E和应变、应变率的关系。当然，到现在为至，我们还缺乏这一方面的知识。

文莎和左卡斯的想法是：既然 $\epsilon_{y(max)}$ 已知，就可以根据(6.162b）计算 $\bar{c}$，这是横向波前进的瞬时速度。这等于给出了瞬时杨氏模量E。

文莎和左卡斯的算法要求有下列数据：

（1）弹体质量M；

（2）弹体半径 R_1；

（3）初始撞击速度 v_p；

（4）已知 $E\left(\epsilon,\ \frac{d\epsilon}{dt}\right)$的关系曲线，或横向波的波前离轴的距离与时间的关系，在目前只有后者是可以靠实验测得的；

（5）防弹布的厚度 h；

（6）在实用应变率范围内的纤维的破坏强度；

（7）纤维的密度 ρ。

计算程序如下：

（1）取时间增量 Δt；

（2）计算 $\Delta U_{总}=v_p\Delta t$，v_p 为该时弹速，在第一步是撞击速度，$U_{总(t)}=U_{总(t-\Delta t)}+v_p\Delta t$；

（3）计算 $\Delta R_2=\bar{c}_t\Delta t$，$R_{2(t)}=R_{2(t-\Delta t)}+\bar{c}_t\Delta t$，$\bar{c}_t$ 是根据实验测得的。第一步时 $R_{2(\Delta t)}=R_1+\bar{c}_t\Delta t$；

（4）计算 $\beta_t=\tan^{-1}\left(\dfrac{R_{2(t)}-R_1}{U_{总(t)}}\right)$；

（5）计算 $\epsilon_{y(t)}$

$$\epsilon_{y(t)}=\epsilon_{y(max)(t)}=\frac{U_{总(t)}\cos\beta_t}{y_{1(t)}\ln(y_2/y_1)_{(t)}}$$

$$=\frac{U_{总(t)}\cos\beta_t\sin\beta_t}{R_{1(t)}\ln(y_2/y_1)_{(t)}} \tag{6.170}$$

其中

$$y_{1(t)}=\frac{R_{1(t)}}{\sin\beta_t}, \quad y_{2(t)}=\frac{R_{2(t)}}{\sin\beta_t} \tag{6.171}$$

（6）计算 c_t（见(6.126 b)式）

$$c_t=\frac{\bar{c}_t}{[\epsilon_{y(t)}(1+\epsilon_{y(t)})]^{1/2}-\epsilon_{y(t)}} \tag{6.172}$$

（7）计算杨氏模量 E_t

$$E_t=\rho c_t^2 \tag{6.173}$$

其中 ρ 为纤维布的密度；

（8）计算轴向力（见(6.166)）

$$f_t=\frac{E_t h}{R_{1(t)}}\cdot\frac{U_{总(t)}\sin\beta_t\cos^2\beta_t}{\ln(y_2/y_1)_{(t)}} \tag{6.174}$$

（9）计算减速度 $a_{p(t+\Delta t)}=-2\pi R_1 f_t/M$，其中 M 为弹体质量；

（10）取下一时段 $t+\Delta t$，计算 $v_{p(t+\Delta t)}=v_{p(t)}+a_{p(t)}\Delta t$；

（11）计算下一时刻 $t+\Delta t$ 的总位移

$$U_{总(t+\Delta t)}=U_{总(t)}+v_{p(t)}\Delta t+\frac{1}{2}a_{p(t)}\Delta t^2 \tag{6.175}$$

（12）计算 $R_{2(t+\Delta t)}=R_{2(t)}+\bar{c}_{(t)}\Delta t$；

（13）重复计算（4）～(12) 直到弹体速度为零（未击穿），或当 $\epsilon_{y(max)}$ 达到破坏应变为止。

这里必须指出，如果我们没有测定横向波的波前离轴距离和时间的实验关系曲线，而有纤维的应力应变关系的静力试验曲

线，即

$$T = T(\epsilon) \tag{6.176}$$

则我们可以有

$$E(\epsilon) = \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \tag{6.177}$$

和

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial T}{\partial \epsilon}} \tag{6.178}$$

这样，只要$\epsilon_{y(max)}$是已知的，就可以决定E、c以及$\bar{c}$。于是，我们一样可以进行步进的计算程序。但是，这里有个怎样决定第一步的$\epsilon_{y(max)}$值的问题。为此，我们可以先取一个较小的初始近似ϵ_{y0}值，从(6.176)、(6.177)、(6.178)中决定c，再从(6.162 b)决定$\bar{c}$，通过(2)、(3)、(4)、(5)计算ϵ_y的第二步近似值，用同样的过程，求ϵ_y的第三步近似值ϵ_{y3}，依此类推，到ϵ_{yn}稳定为止。它就是我们在计算起始时所用的$\epsilon_{y(max)}$。其它计算如旧，但不用第六步和第七步。

上述计算结果和实验很接近[6-48]。

参考文献

[6-1] J. Boussinesq, Applications des potentials a l'etude de l 'equilibre et du mouvement des solides elastiques, Gauthier-Villars, Paris (1885).

[6-2] C. Zener, Phys. Rev., 59, 669(1941).

[6-3] M. A. Medick, J. Appl. Mechanics, Trans. ASME, Ser. E. 28, 223 (1961).

[6-4] U. S. Army Ballistic Research Laboratories, A Penetration Equations Handbook (Joint Technical Coodination Group). Aberdeen Proving Ground, Maryland(1977).

[6-5] Ballistics Research Laboratories, Tech. Report, No. 47, Aberdeen Proving Ground, Maryland (1961).

[6-6] R. F. Recht, Quasi-Empirical Models of the Penetration Process, Denver Research Institute, University of Denver(1972).

[6-7] R. F. Recht and T. W. Ipson, NWC TP 5648, Naval Weapons Center, China Lake, California(1974); see also Proc. 1st Symp. on Ba-

llistics, IV-315, Orlando, Florida(1974).
[6-8] M. Kornhauser, Structural Effects of Impact, Spartan Books, Baltimore (1964).
[6-9] D. R. Sawle, AIAA Journal, 8, 1240(1970).
[6-10] N. R. Sorenson, Proc. 7th Symp. Hypervelocity Impact, 6, 281(1964).
[6-11] R. M. Hayduk, P. S. Gough and E. Alfaro-Bou, NASA-TN D 7308 (1973).
[6-12] J. J. Misey, J. P. Lambert, P. G. Morfogenis and J. A. Zukas, Proc. 2nd Int. Symp. on Ballistics and Warhead Mechanisms (alternate paper), Daytona, Florida(1976).
[6-13] N. M. Wang, J. Appl. Mech., Trans. ASME, E 37, 431(1970).
[6-14] B. Kaftanoglu and J. M. Alexander, Int. J. Mech. Sci., 12, 1065 (1970).
[6-15] N. Cristescu, Dynamic Plasticity, North-Holland(1967).
[6-16] J. W. Craggs, Proc. Roy. Soc., Edinburgh, A 63, 369(1952).
[6-17] H. G. Hopkins and W. Prager, Z. Angew. Math. Phys., 5, 317(1954).
[6-18] A. J. Wang and H. G. Hopkins, J. Mech. Phys. Solids, 3, 22(1954).
[6-19] T. Wierzbicki and A. L. Florence, Int. J. Solids Structure, 6, 553 (1970).
[6-20] N. Jones, J. Appl. Mech., Trans. ASME, E, 35, 59(1968).
[6-21] N. Jones, Int. J. Solid Structure, 3, 635(1967).
[6-22] N. Jones, Int. J. Solid Structure, 7, 1007(1971).
[6-23] T. A. Duffey and W. S. Key, Experimental Mech., 9, 241(1969).
[6-24] C. A. Calder and W, Goldsmith, International Journal of Solid Structure, 7, 863(1971).
[6-25] C. A. Calder, J. M. Kelly and W. Goldsmith, Int. J. Solids Structure, 7, 1143(1971).
[6-26] J. M. Kelly and T. Wierzbicki, Z. Angew. Math. Mech., 18, 236 (1967).
[6-27] T. Wierzbicki, Int. J. of Solids Structures, 3, 635(1967).
[6-28] J. M. Kelly and T. R. Wilshaw, Proc. Roy. Soc. (London), A306, 435 (1968).
[6-29] P. Beynet and R. Plunkett, Experimental Mechanics, 11, 64(1971).
[6-30] Wei-Zang Chien, Large Deflection of a Circular Clamped Plate Under Uniform Pressure, Chinese Journal of Physics, 6, 102-113 (1947).
[6-31] L. M. Perzyna, C. D. Lundergan, W. Herrman, Dynamic Response of Aluminum, J. Appl. Phys., 35, 1203(1964).
[6-32] J. W. Craggs, A Rate Dependent Theory of Plasticity, International

J. of Engineering Sciences 3, 31(1965).

〔6-33〕 J. C. Smith, et al, Stress-Strain Relationship in Yarns Subjected to Rapid Impact Loading, 4. Transverse Impact Tests, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 57, No.2, pp83-99 (1956).

〔6-34〕 J. C. Smith, F. L. McCrackin, H. F. Schiefer, The Impact Absorbing Capacity of Textile Yarns, ASTM Bulletin No.220(1957).

〔6-35〕 G. M. Stewart, D. R. Patterson, T. Harmburger, Dynamics of Body Armor Materials Under High Speed Impact, Part II, Single and Triple Microflash Instrumentation for Single Yarn Studies, Army Chemical Center Report CWLR 2142(1957).

〔6-36〕 C. R. Maheux, et al., Dynamics of Body Armor Materials Under High Speed Impact, Part I, Transient Deformation, Rate of Deformation, Energy Absorption in Single and Multilayer Armor Panels, Army Chemical Center Report, CWLR 2141(1957).

〔6-37〕 D. R. Petterson, et al., Dynamics of Body Armor Materials Under High Speed Impact, Part III, Dynamic Strain-Position Distributions of Nylon Impacted Transversely. Army Chemical Center Report CWLR 2161(1957).

〔6-38〕 D. R. Petterson, G. M. Stewart, Dynamics of Body Armor Materials Under High Speed Impact, Part IV, Nominal Dynamic Stress-Strain Curves, Army Chemical Center Report, CWLR(1957).

〔6-39〕 D. R. Petterson, G. M. Steward, Textile Research Journal, Vol. 30, pp422-431(1960).

〔6-40〕 J. C. Smith, I. M. Blansford and H. F. Schiefer, Stress Strain Relationship in Yarns Subjected to Rapid Impact Loading, Textile Research Journal, Vol. 30, No. 10, pp 752-760(1960).

〔6-41〕 F. L. McCracakin, Effect of Air Drag on the Motion of a Filament Struck Transversely by a High Speed Projectile, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 66, No. 4., pp. 317-322 (1962).

〔6-42〕 G. A. M. Butterworth and N. J. Abbott, Mechanical Testing of Polymeric Fibrous Materials, Journal of Materials, Vol. 2, No. 3, pp. 487-518(1967).

〔6-43〕 T. T. Chiao and R. L. Moore, Tensile Properties of PRD-49 Fiber in Epoxy Matrix, Journal of Composite Materials, Vol. 6, Oct. 1972, pp547-551.

〔6-44〕 Anonymous, Quarterly Report No. 6 on Ballistic Protective Buoyant Material, Mellon Institute, Research Project, 388-2(1961).

[6-45] R. C. Laible and M. C. Henry, A Review of the Development of Ballistic Needle-Punched Felts, US Army Natick Laboratories Technical Report 70-32-CE(1969).

[6-46] T. R. Vinson and J. A. Zukas, On the Ballistic Impact of Textile Body Armor, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Series E, Vol. 42 No. 2, pp. 263-268(1975).

[6-47] J. R. Vinson, Edge Load Solutions for Conical Shells, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 92, pp37-58(1966).

[6-48] J. R. Vinson, Theory of Plates and Shells in Aerospace Structures, II. Theory of Shells, University of Delaware, Dept. of Mechanical and Aerospce Engineering (1968).

第七章　薄板靶体的侵入和击穿(中)

§7.1　刚性钝头弹体对薄板靶体挤凿破坏的宏观理论

刚性钝头弹体在靶元中引起顺着撞击方向的质点位移，从而在撞击区域的周边造成靶元材料剪切变形，以至于达到剪切挤凿破坏。平头柱形弹体是造成这种破坏的最理想的弹体，在平头前方的靶元材料都是随着撞击方向作向前的运动的；球形、卵形和大角度的锥形弹头撞击靶元时，在接触区内的材料的运动方向，主要也是向前的。对于平头柱形弹体而言，靶体的挤凿截面大体上是和弹体的柱轴平行，而且挤凿下来的靶元材料的尺寸，也和弹体正截面相仿；对于球形弹头和卵形弹头而言，靶元上的挤凿破坏截面，一般和弹体轴线成45°或更大的角度。

由于钝头弹体对靶元的挤凿破坏主要是剪切破坏，所以，人们就可以用比较简单的动力学基本观点来作宏观研究。这些基本概念就是动量守恒、能量守恒、以及流阻或摩阻运动等。

（1）动量守恒模式（斯彼尔斯，1951）[7-1]　这是一个较早的模式。这个模式认为撞击弹体的动量 mv_0，在撞击后，变成弹体 m 和挤凿下来的靶元 $\rho_t\pi R_p^2h_t$ 的总动量 $(m+\rho_t\pi R_p^2h_t)v_f$。其中 v_f 为靶元挤凿下来后的速度，它也是弹体在击穿靶体后的速度。用动量守恒定律，有

$$mv_0=(m+\rho_t\pi R_p^2h_t)v_f \tag{7.1}$$

或

$$v_f=\frac{m}{m+\rho_t\pi R_p^2h_t}v_0 \tag{7.2}$$

如果是平头柱形弹体，弹体的长为 L_0，并设弹体和靶体材料相

同，则有

$$m = \rho_t \pi R_p^2 L_0 \tag{7.3}$$

把（7.3）代入（7.2）式，得

$$v_f = \frac{L_0}{L_0 + h_t} v_0 \tag{7.4}$$

这就是弹体剩余速度 v_f 和靶体厚度 h_t 的关系式。我们必须指出，这里略去了在挤凿过程中，有一部分动量传给了靶体的剩余部分。虽然由于挤凿过程一般很快，传给靶体剩余部分的动量不可能很大，但是因为略去了这一部分耗散的动量，所以按（7.4）式计算所得的靶体碎块的剩余速度 v_f，比实际速度一定偏高，实验证明也是如此。斯彼尔斯[7-1]曾用长 16 毫米、半径 7.1 毫米的平头柱形弹体以速度 v_0 为 1470 米/秒撞击各种厚度的低碳钢靶板，测得了若干弹体的剩余速度，的确证明了（7.4）所得的曲线高于多数测得的 v_f 实验值（图 7-1）。

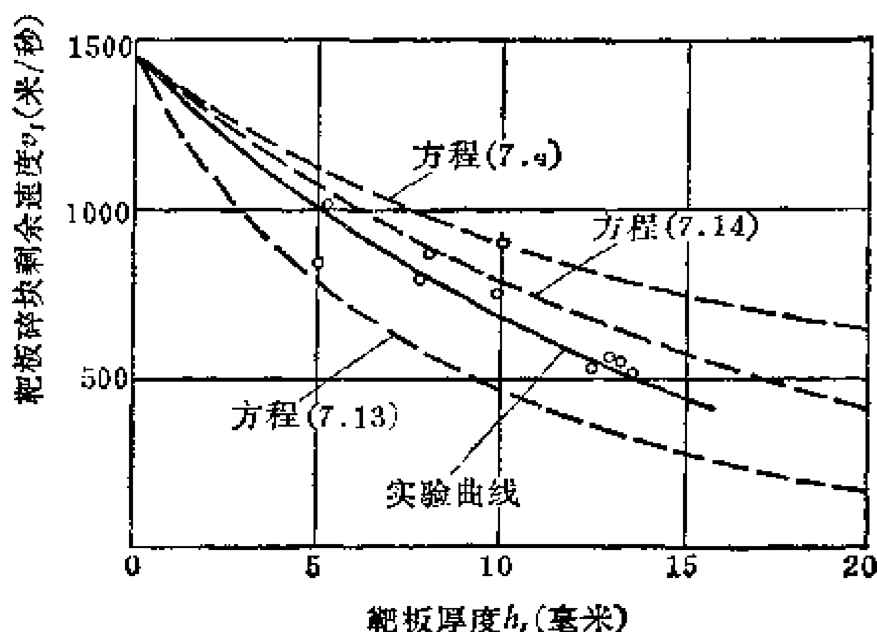


图7-1　斯彼尔斯实验和挤凿破坏宏观理论的比较

方程（7.4）—动量守恒模式；

方程（7.13）—正确的流阻模式；

方程（7.14）—斯彼尔斯流阻模式。

（2）流阻运动模式（斯彼尔斯，1951）[7-1] 斯彼尔斯认为在挤凿过程中速度很高，可以把凿离的碎块和剩留的靶体间的相对运动看作为流体的流动。弹体平头上每单位面积的流动动压力为 $\frac{1}{2}\rho_t v^2$，弹头的面积为 πR_p^2，于是弹体运动时的阻力为 $\frac{1}{2}\pi R_p^2\rho_t v^2$，弹体运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{2}\pi R_p^2\rho_t v^2 \tag{7.5}$$

把 $\frac{dv}{dt}$ 写成 $v\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}$，于是上式可以化为

$$\frac{dv^2}{v^2}=-\pi R_p^2\rho_t\frac{2}{m}dx \tag{7.6}$$

积分得

$$\ln v^2=-\pi R_p^2\rho_t\frac{2}{m}x+C \tag{7.7}$$

决定积分常数 C 的条件为 $x=0$，$v=\bar{v}_0$，这是撞击后弹体和靶块共同运动时的初速度，于是，得

$$C=\ln\bar{v}_0^2 \tag{7.8}$$

于是（7.7）可以写成

$$v=\bar{v}_0\,e^{-\frac{\pi R_p^2\rho_t x}{m}} \tag{7.9}$$

设 m 是平头柱形弹体的质量，材料和靶体的相同，

$$m=\pi R_p^2 L_0\rho_t \tag{7.10}$$

而且根据撞击开始的动量守恒定律

$$\bar{v}_0=\frac{L_0}{L_0+h_t}v_0 \tag{7.11}$$

把（7.10）、（7.11）代入（7.9）式，得

$$v=\frac{L_0}{L_0+h_t}v_0\,e^{-\frac{x}{L_0}} \tag{7.12}$$

当 $x=h_0$ 时，v 为弹头的剩余速度 v_f，所以得

$$v_f = \frac{L_0}{L_0 + h_t} v_0 \ e^{-\frac{h_0}{L_0}} \tag{7.13}$$

斯彼尔斯忽视了 $\bar{v}_0$ 和 v_0的区别，得

$$v_f = v_0 \, e^{-\frac{h_0}{L_0}} \tag{7.14}$$

在图 7-1 上，我们也有方程（7.13)、(7.14）的曲线，曲线（7.13）比所有实验点都低，这指出把靶体的反作用看作为流体阻力是一种过高地估计阻力的观点。（7.14）反而更接近实验点，完全是一种巧合。

其实（7.13）低于实验点是必然的。因为当弹头以撞击速度 v_0撞击靶元接触面，而使接触面和弹体达到共同速度 $\bar{v}_0$的过程是很短的，在这样短的时间里，撞击波中的弹性波前还来不及到达靶板的背面，因此，动量守恒计算式（7.11）中的 h_t，不应该是全部材料的厚度，而只应是一部分材料的厚度。也就是说.（7.13）式的计算结果一定是偏小的。这和图 7-1 的结果相符合，所有实验点都在（7.13）式曲线的上方。

（3）摩阻运动模式（马推尔，1897）[7-2] 马推尔曾假设，当挤凿下来的靶块对靶元的其余部分作相对运动时，其阻力主要来自剪切屈服应力 σ_{SY}。它的总和等于剪切屈服应力 σ_{SY} 乘凿离靶块和靶元的其余部分的瞬时接触面积 $2\pi R_P(h_t - x)$，其中 x 为弹体在撞击后向前运动的距离，所以总摩阻为

$$F = 2\pi R_P(h_t - x)\sigma_{SY} \tag{7.15}$$

弹体和凿离靶块的运动方程为

$$(m + \pi R_P^2 h_t \rho_t)\frac{dv}{dt} = -2\pi R_P(h_t - x)\sigma_{SY} \tag{7.16}$$

由于

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\ \frac{d}{dx}v^2 \tag{7.17}$$

所以

$$dv^2 = -\frac{4\pi R_P \sigma_{SY}}{m + \pi R_P^2 h_t \rho_t}(h_t - x)dx \tag{7.18}$$

积分得

$$v^2=\frac{2\pi R_p\sigma_{SY}}{m+\pi R_p^2 h_t\rho_t}(h_t-x)^2+C_1 \quad (2.19)$$

积分常数 C_1 由起始条件 $x=0$， $v=\bar{v}_0$ 决定。最后可得

$$v^2=\bar{v}_0^2+\frac{2\pi R_p\sigma_{SY}}{m+\pi R_p^2 h_t\rho_t}[(h_t-x)^2-h_t^2] \quad (7.20)$$

当挤凿结束时， $x=h_t$， $v=v_f$。于是有

$$v_f^2=\bar{v}_0^2-\frac{2\pi R_p\sigma_{SY}h_t^2}{m+\pi R_p^2 h_t\rho_t} \quad (7.21)$$

根据动量守恒定律

$$\bar{v}_0=\frac{m}{m+\pi R_p^2 h_t\rho_t}v_0 \quad (7.22\text{a})$$

而且，设弹体和靶体材料的密度相同，我们有

$$m=\pi R_p^2 L_0\rho_t \quad (7.22\text{b})$$

(7.21) 可以化为

$$v_f^2=\left(\frac{L_0}{L_0+h_t}\right)^2 v_0^2-\frac{2\sigma_{SY}h_t^2}{\rho_t R_p(L_0+h_t)} \quad (7.23)$$

设弹道极限速度为 v_{50}，则很易从 v_{50} 的定义看到，当 $v_0=v_{50}$ 时，$v_f=0$，于是从 (7.23) 求得

$$v_{50}=\frac{(L_0+h_t)}{L_0}\frac{h_t}{R_p}\sqrt{\frac{2R_p\sigma_{SY}}{(L_0+h_t)\rho_t}}=\frac{h_t}{L_0}\sqrt{\frac{2(L_0+h_t)\sigma_{SY}}{R_p\rho_t}} \quad (7.24)$$

而 (7.23) 可以写成

$$v_f^2=\left(\frac{L_0}{L_0+h_t}\right)^2(v_0^2-v_{50}^2) \quad (7.25)$$

这个模式给出了弹道极限速度（即击穿速度）v_{50}，如果 σ_{SY}、ρ_t 是已知的，就可以从 (7.24) 和 (7.25) 计算 v_{50} 和 v_f。我们知道 σ_{SY} 在静力加载下是已知的，但动力屈服极限和静力屈服极限并不相同。但是我们可以用实验值决定 σ_{SY}/ρ_t 的值。例如，以图 7-1 的实验值为例，如果取 $\sigma_{SY}/\rho_t=248500$（毫米/秒），则(7.23) 式和实验值大体符合（图 7-2）。从计算求得，本实验的安全靶

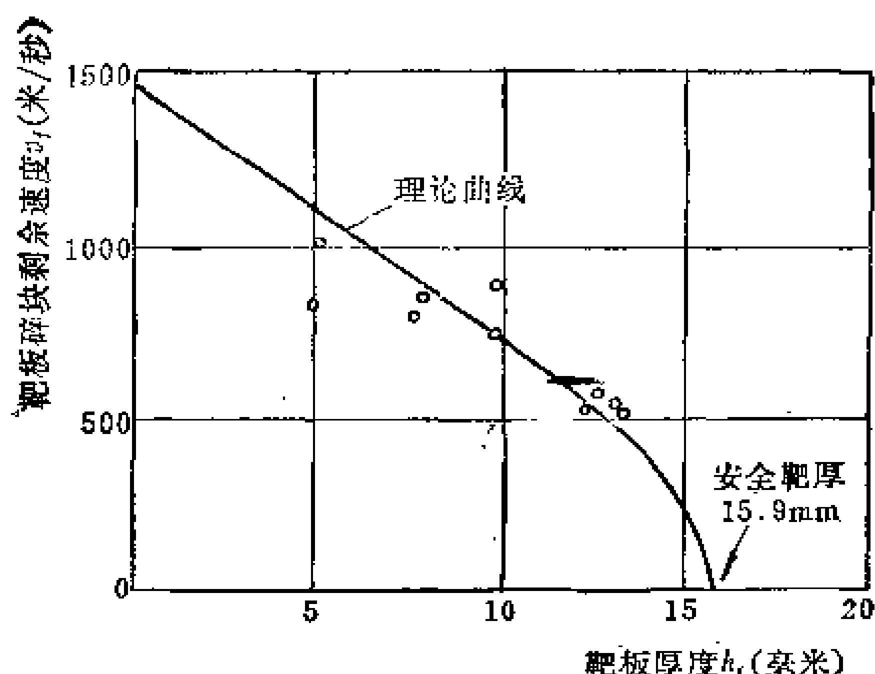


图7-2 斯彼尔斯实验值和摩阻运动模式的理论方程(7.23)的比较

厚为 15.9 毫米，小于 15.9 毫米的靶板都能击穿。称安全厚度为 h^*，则 (7.23) 中和 h^*有关的 v_f 应该为零。于是，从 (7.23)可求得决定安全靶厚的方程式

$$h^{*2}(L_0+h^*)=\frac{L_0^2\rho_t R_p}{2\sigma_{SY}}v_0^2 \tag{7.26}$$

（4）能量守恒模式（里希脱[7-8]，1963） 里希脱和尹泼苏[7-8]于 1963 年发表了在这一方面的最深入的理论，他们的理论基础是能量守恒定律。他们把问题作一般化处理，包括：（1）弹体的密度 ρ_p 和靶板的密度 ρ_t 不相同；（2）弹体不一定是刚性的；（3）弹体的半径和凿离靶体的靶块半径不一定相等；（4）弹体材料和靶体材料不同，所以弹性压缩波的波速即声波波速就不同；（5）可以推广到斜角撞击的问题。

考虑的问题可以用图 7-3 表示。

里希脱认为挤凿撞击是一个动能转换的问题。弹体的原有动能$\frac{1}{2}M_p v_0^2$ 转化为三部分能量：（1）在凿离靶块后，弹体和靶块的剩余总动能，即$\frac{1}{2}(M_p+M_t)v_f^2$，其中 M_t 为凿离的靶块

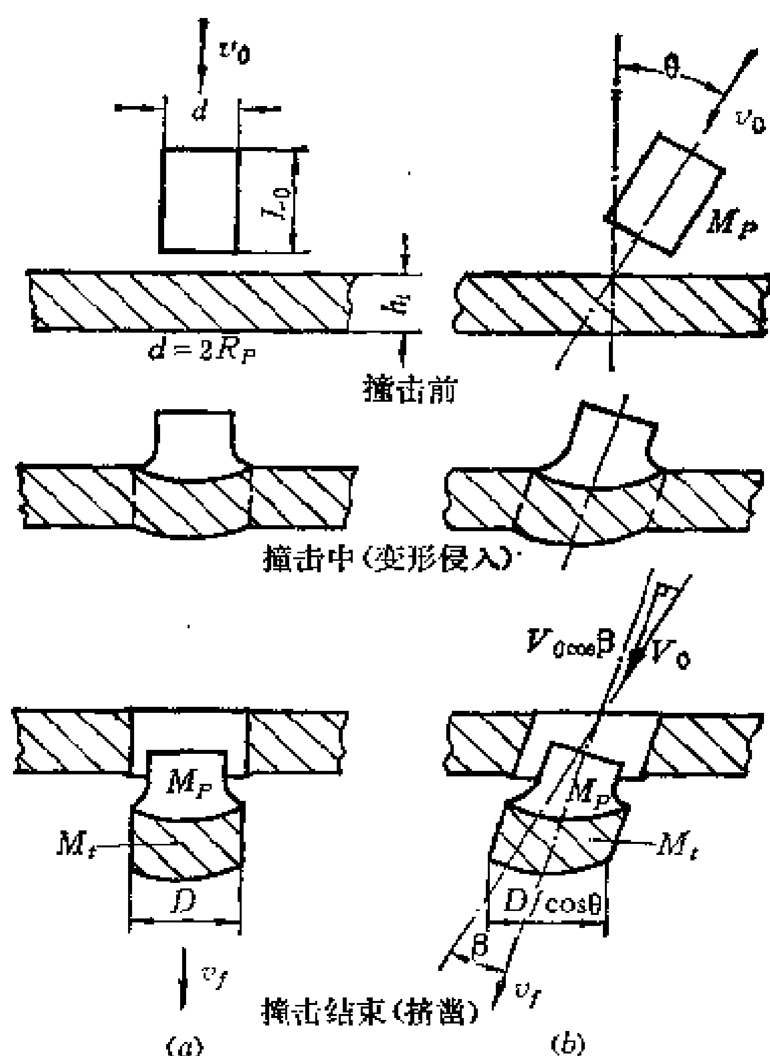


图7-3　钝头弹体挤凿薄靶的过程

(a) 正撞($D=2R_t$)；(b) 斜撞。

的质量，v_f为弹体和靶块的剩余速度；(2)在弹孔四周由于形成弹孔所耗损的能量W_s，它包括对剪切屈服应力做的功、传播出去的热量和通过弹塑性波传播出去的变形能的总和；(3)在弹体和靶元接触中形成共同速度$\bar{v}_0$时所耗能量W_f。由于能量守恒定律，有

$$\frac{1}{2}M_P v_0^2=\frac{1}{2}(M_P+M_t)v_f^2+W_s+W_f \tag{7.27}$$

现在先研究W_f。设弹体和靶元接触后，在形成的共同速度为$\bar{v}_0$，根据动量守恒定律，我们有

$$\bar{v}_0=\frac{M_P}{M_P+M_t}v_0 \tag{7.28}$$

所以，在开始撞击中，为了达到共同速度所耗动能为

$$W_f=\frac{1}{2}M_p v_0^2-\frac{1}{2}(M_p+M_t)\bar{v}_0^2=\frac{1}{2}M_p\left\{1-\frac{M_p}{M_p+M_t}\right\}v_0^2 \tag{7.29 a}$$

或化简为

$$W_f=\frac{1}{2}\frac{M_pM_t}{M_p+M_t}v_0^2 \tag{7.29 b}$$

于是（7.27）可以写成

$$\frac{1}{2}\frac{M_p^2}{M_p+M_t}v_0^2=\frac{1}{2}(M_p+M_t)v_f^2+W_s \tag{7.30}$$

当 $v_f=0$ 时，根据定义 v_0为弹道极限速度 v_{50}，于是 W_s 为

$$W_s=\frac{1}{2}\frac{M_p^2}{M_p+M_t}v_{50}^2 \tag{7.31}$$

在这里，实际上假定了 W_s 和撞击速度无关。这一点可以从动力剪切屈服应力和撞击速度无关（见图3-9）上得到证实。把(7.31)代入（7.30），得

$$v_f=\frac{M_p}{M_p+M_t}(v_0^2-v_{50}^2)^{1/2} \tag{7.32}$$

它在形式上和摩阻运动模式的结论（7.25）完全一致。当然，我们应该指出（7.25）是在靶体弹体材料相同和粗细相同的条件下的形式。其实这是很明显的，（7.25）式是摩阻运动方程的能量积分〔即（7.18）的积分〕，所以其结果应该是相同的。当然，这里的 v_{50}^2，比（7.24）所代表的内容要广泛一些。在（7.24）中，v_{50}^2只代表了剪切屈服应力做的功，而这里的 v_{50}^2，既代表了剪切屈服应力做的功，还包含着失散的热量和外传的弹塑波的能量。里希脱[7-3]不加证明地列出了 v_{50}和剪切屈服应力的关系式

$$v_{50}=\frac{2\rho_t h_t^2\psi\eta}{\rho_P L_0 R_P}\left\{1+\left[\frac{\rho_P L_0+\rho_t h_t}{\rho_t h_t}\left(1+\frac{R_P}{2\rho_t h_t\eta\psi^2}\right)\right]^{1/2}\right\} \tag{7.33}$$

其中

$\eta(\sigma_{SY})$——它是和板材动力剪切强度有关的函数，并有应力的量纲。对于低炭钢的板材，里希脱取

$$\eta = 1.76 \times 10^{6}(psi) \tag{7.34}$$

$$\psi = \frac{\rho_t c_t + \rho_p c_p}{\rho_t c_t \rho_p c_p} = \frac{1}{\rho_t c_t} + \frac{1}{\rho_p c_p} \tag{7.35}$$

其中的 c 为声速， ρ 为密度。

（7.31）也可以写成

$$v_f = \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho_t}{\rho_p}\left(\frac{R_t}{R_p}\right)^2 \frac{h_t}{L_0}\right]}(v_0^2 - v_{50}^2)^{1/2} \tag{7.36}$$

里希脱-尹泼莎理论和实验的比较见图7-4。

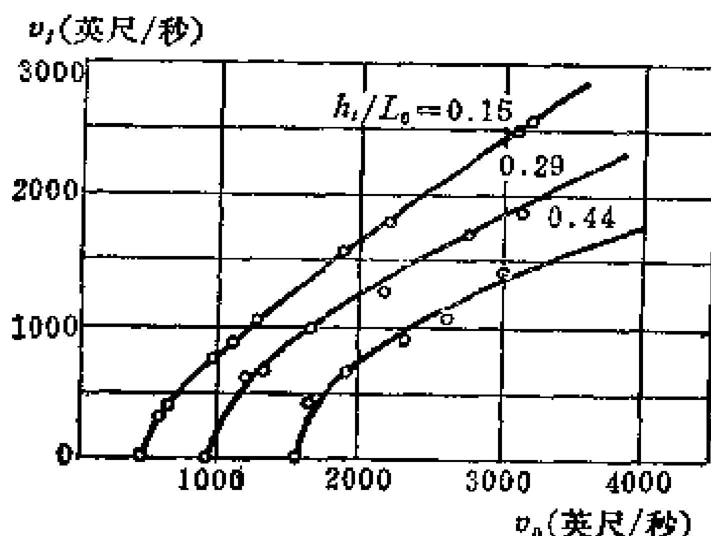


图7-4　剩余速度和撞击速度的关系（垂直撞击，薄靶板）

结合上图可以看出实验和理论的比较情况：

h_t/L_0	v_{50}（计算）	v_{50}（实测）
0.15	440(psi)	465(psi)
0.29	970(psi)	960(psi)
0.44	1575(psi)	1570(psi)

这儿 v_{50}（计算）是根据（7.33）计算的， η 取 $1.76 \times 10^{6}(psi)$。我们可以看到，理论和实验很一致。

在斜角撞击时，由于有一部分动量通过凿离截面对靶体其余

部分的冲量，而消耗给靶体本身了，所以凿离靶块和弹体的运动方向并不是原来的撞击方向（见图7-3 *b*）。设其夹角为β，则有效的撞击速度为 $v_t\cos\beta$。同样，有效的击穿速度或弹道极限速度不是 v_{50} 而是 $v_{50}\cos\beta$。于是，在适用于垂直撞击的公式(7-36)中，为了使它也适用于斜击，必须作下列更改，即

$$\left.\begin{aligned} v_0 &\longrightarrow v_0\cos\beta \\ v_{50} &\longrightarrow v_{50}\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

其次，靶厚 h_t 在斜方向也增加了，它也必须更改为

$$h_t \longrightarrow h_t/\cos\theta \tag{7.38}$$

把（7.36）作（7.37）和（7.38）的更改，即得斜击公式

$$v_f = \frac{\cos\beta}{1+\dfrac{\rho_t}{\rho_p}\left(\dfrac{R_t}{R_p}\right)^2\dfrac{h_t}{L_0\cos\theta}}(v_0^2-v_{50}^2)^{1/2} \tag{7.39}$$

其中θ为撞击斜角，β为进击方向和击穿后飞逸方向之间的夹角。

怎样决定β角将在以后专节讨论。

§7.2 刚性平头弹体对薄板靶体的挤凿过程的粘塑性理论（毕推尔-台维斯1963[7-4]）

在较高速度的垂直撞击下，只要靶板厚度小于弹体直径，理论结果证明，在靶体内起主要作用的是剪应力 σ_{rz}，而且人们经常把这些剪应力在厚度方向当作是均匀分布的，同时，采用粘塑性模式作为本构关系。

人们[7-5,7-6,7-7]用下面的简单的宾汉型本构关系：

$$\sigma_{rz}=\left[\operatorname{sgn}\frac{\partial v}{\partial r}\right]\sigma_{YS}^D+\mu\dot{\epsilon}_{rz}=-\sigma_{YS}^D+\mu\dot{\epsilon}_{rz}$$

其中 $\dfrac{\partial v}{\partial r}$ 的符号是负的，μ为动力粘度系数。一般说来动力屈服应力和 $\mu\dot{\epsilon}_{rz}$ 相比，是可以略去的（如毕推尔-台维斯理论）。用ω

表示靶板中面的垂直位移，v 为垂直位移的速度，于是有

$$\epsilon_{rz}=\frac{\partial w}{\partial r},\quad \dot{\epsilon}_{rz}=\frac{\partial v}{\partial r} \tag{7.41}$$

而

$$v=\frac{\partial w}{\partial t}=\dot{w} \tag{7.42}$$

毕推尔-台维斯在略去了 σ^{D}_{YS} 后，把本构关系写成

$$\sigma_{rz}=\mu\frac{\partial v}{\partial r} \tag{7.43}$$

还有人用理想塑性材料的本构关系[7-8]，也有的用线性的硬化固体和弹性粘塑性的固体模式[7-9,7-10]，还有的人从实验数据中选用经验公式[7-11]。在苏联，利用一个空间坐标研究轴对称问题的还有喀喀加诺夫[7-12,7-13]，但他不仅考虑了 σ_{rz}，而且还考虑了其它应力分量。

现在让我们介绍毕推尔-台维斯的工作如下：设板上一部分（$r\leqslant R_P$）有初始速度 v_0如图 7-5 所示。

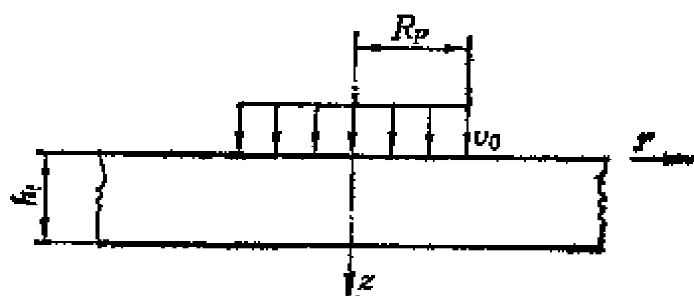


图7-5　靶板的初始速度条件

其它部分为零，让我们假定 v 和坐标 z 无关（薄板假定），只是 r、t 的函数。则有 $v(r,t)$ 的初始条件为

$$v(r,0)=\begin{cases}0, & 当\ r>R_P\\ v_0, & 当\ r\leqslant R_P\end{cases} \tag{7.44}$$

和这个初始条件相适应的，只有一个应力分量 σ_{rz}。它有轴对称性质，满足运动方程

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho_t\frac{\partial v}{\partial t} \tag{7.45}$$

把（7.43）代入（7.45），得决定 $v(r,t)$ 的运动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\rho_t}{\mu}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{7.46}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &v(\infty,\ t)=0 \quad （对无穷大板）\\ &v(R_t,\ t)=0 \quad （对半径 R_t 的圆板）\end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

还有在弹体周边（$r=R_p$），剪应力的合力和弹体、靶块统一体的惯性力的动力平衡条件

$$(m_p+m_t)\frac{dv}{dt}=2\pi R_p h_t \sigma_{rz} \quad （在 r=R_p） \tag{7.48}$$

其中

$$m_t=\pi\rho_t R_p^2 h_t, \qquad m_p=\pi\rho_p R_p^2 L_0 \tag{7.49}$$

（7.46）是一个在传热学内常见的抛物线型微分方程，其解可以写成（对无穷大板适用）

$$v(r,t)=\int_0^\infty f(\lambda)J_0(\lambda r)e^{-\frac{\rho_t}{\mu}\lambda^2 t}d\lambda \tag{7.50}$$

式中 $f(\lambda)$ 是由起始条件（7.44）决定的。根据华茨生的《贝塞耳函数论》(406页)[7-14]，当满足（7.44）时

$$f(\lambda)=v_0 R_p J_1(\lambda R_p) \tag{7.51}$$

于是 $v(r,t)$ 应该写成

$$v(r,t)=v_0 R_p\int_0^\infty J_1(\lambda R_p)J_0(\lambda r)e^{-\frac{\rho_t}{\mu}\lambda^2 t}d\lambda \tag{7.52}$$

而从（7.43）得剪力 σ_{rz}

$$\sigma_{rz}=-\mu v_0 R_p\int_0^\infty J_1(\lambda R_p)J_1(\lambda r)e^{-\frac{\rho_t}{\mu}\lambda^2 t}d\lambda \tag{7.53}$$

这个广义积分是可以找到闭合形式的，根据华茨生的《贝塞耳函数论》(395页)，（7.53）可以写成

$$\sigma_{rz}=\frac{v_0 h_t R_p}{2t}e^{-\frac{(r^2+R_p^2)\rho_t}{\mu t R_t}}I_1\left(\frac{r\rho_t}{2\mu t}\right) \tag{7.54}$$

如果引进下列诸无量纲量

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{r}{R_p}\ (\text{无量纲径向坐标}) \\ \tau &= \frac{\mu t}{\rho_t R_p^2}\ (\text{无量纲时间坐标}) \\ \sigma^* &= \frac{R_p}{\mu v_0}\sigma_{rz}\ (\text{无量纲剪应力}) \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

(7.54) 可以写成

$$\sigma^*=\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{x^2+1}{4\tau}}I_1\left(\frac{x}{2\tau}\right) \tag{7.56}$$

在不同时间内 σ^*的分布如图 7-6 所示。在 $\tau=0$ 时，σ^* 到

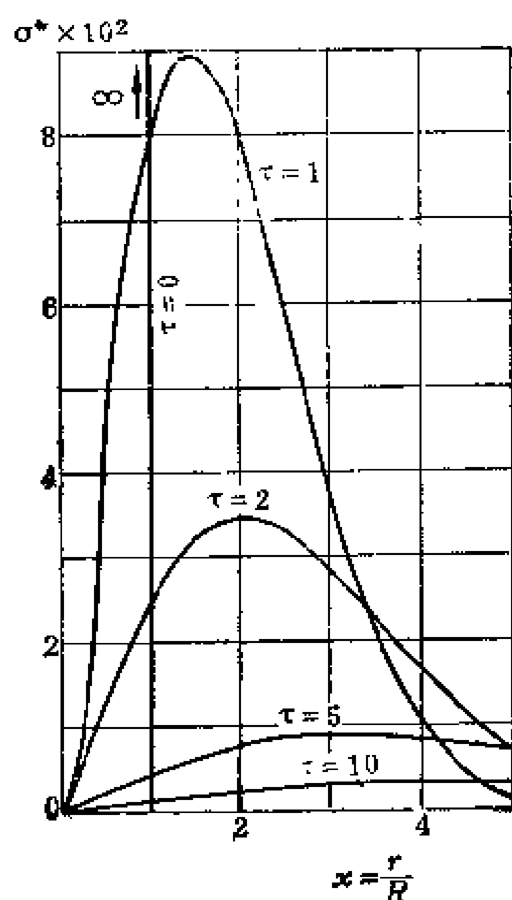


图7-6　在 τ = 0，1，2，5，10时无量纲剪应力σ^*对 x 的分布

处都等于零，只有在 $x=1$ 处，即在弹体的边缘上，σ^* 为无穷大，这是合乎实际的。时间越长，σ^* 的分布区域越广，这也是合乎实际的。

在不同地点处 σ^* 随时间的变化如图 7-7 所示。在 $x=1.0$ 处，即在弹体的边缘处，当 $\tau\to 0$ 时，σ^* 为无穷大，随着时间的增加，σ^* 迅速降低。对 $x\neq 1$ 的点而言，当 $\tau\to 0$ 时，σ^* 都是零，随着时间的增加，σ^* 都是先增后降，最后又趋于零。

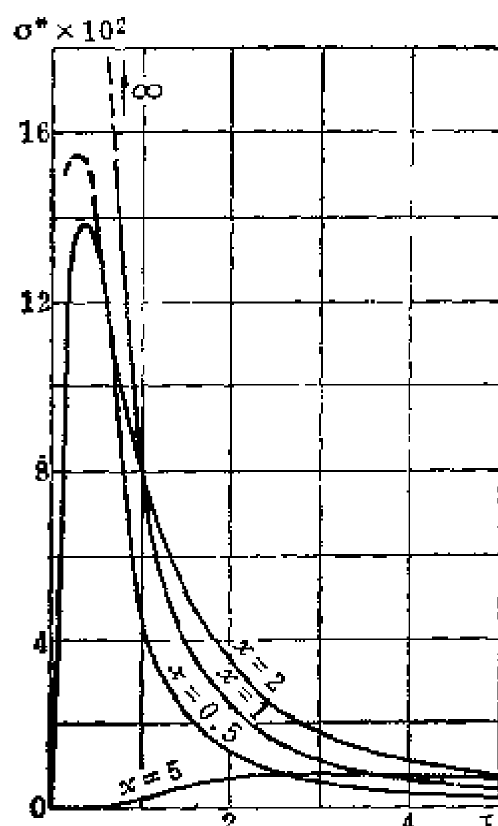


图7-7　在 $x=0.5,\ 1,\ 2,\ 5$ 处无量纲剪应力 σ^* 对 τ 的关系

速度分布可以通过积分下式求得

$$v_0\sigma^*(x,\tau)=\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} \tag{7.57}$$

积分得

$$v(x,\tau)=v_0\int_0^x \sigma^*(x_1,\tau)dx_1+g(\tau) \tag{7.58}$$

$g(\tau)$ 为积分常数，它是 τ 的函数。根据边界条件（7.47），即 $v(\infty,\tau)=0$，我们有

$$v(\infty, \tau)=v_0\int_0^{\infty}\sigma^*(x_1, \tau)dx_1+g(\tau)=0 \quad (7.59)$$

这就决定了$g(\tau)$。两式中消去$g(\tau)$，即得

$$v(x, \tau)=-v_0\int_x^{\infty}\sigma^*(x_1, \tau)dx_1 \quad (7.60)$$

把（7.56）式代入，上式可以写成

$$\frac{2v}{v_0}=v^*(x, \tau)=-\frac{e^{-\frac{1}{4\tau}}}{\tau}\int_x^{\infty}e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}I_1\left(\frac{x_1}{2\tau}\right)dx_1 \quad (7.61)$$

这是可以通过数值积分求解的。图7-8为$\tau=1$和$\tau=2$时$v(x, \tau)$对空间坐标的分布图。图中也有$\tau=0$的分布图。可以看到，$v(x, \tau)$随着τ的增大而迅速衰减。

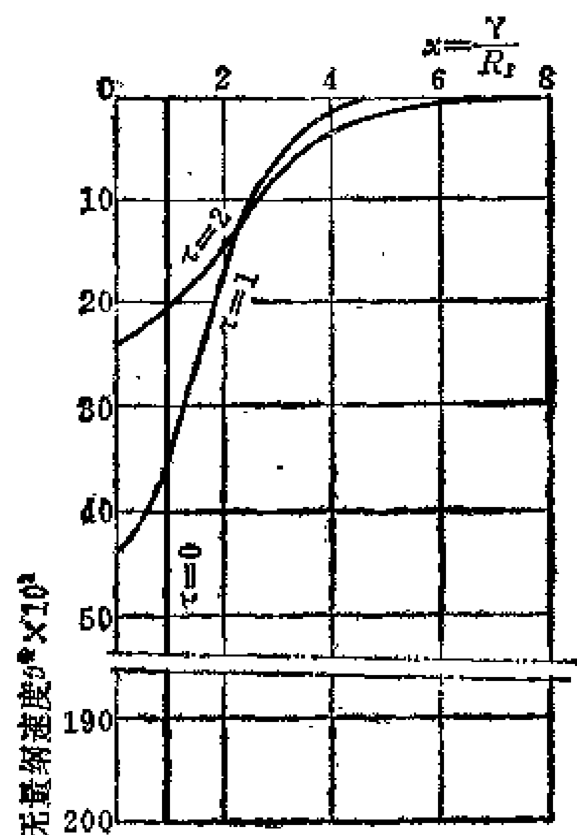


图7-8　$\tau=0, 1, 2$时的无量纲速度v^*的分布

位移可以利用（7.61）对t积分求得，也可以利用（7.52）对t积分求得，由

$$w(r,t)=\int_0^t v(r,\xi)d\xi \tag{7.62}$$

把（7.52）代入上式，积分得

$$w^*(x,\tau)=\int_0^\infty \frac{J_1(\gamma)J_0(\gamma x)}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma^2\tau})d\gamma \tag{7.63}$$

其中 γ 和 w^* 都是无量纲量

$$\gamma=\lambda R_p,\quad w^*=\frac{w\mu}{v_0 R_p^2\rho_t}\ （无量纲位移） \tag{7.64}$$

毕推尔-台维斯[7-4]曾用 0.3 英寸口径的弹体，以 3000 英尺/秒的速度撞击钢板，用伯希杨[7-5]用的钢材数据

$$\rho_t=7.3\times10^{-4}\ （磅-秒^2/英寸^4） \tag{7.65 a}$$

$$\mu=5.69\ （磅-秒/英寸^2） \tag{7.65 b}$$

于是，物理量和有关无量纲量的关系为（$R_p=0.15$ 英寸）

$$\left.\begin{aligned}
t&=\frac{\rho_t R_p^2}{\mu}\tau=2.88\times10^{-6}\tau\ (秒)\\
\sigma_{rz}&=\frac{\mu v_0}{R_p}\sigma^*=1.37\times10^6\sigma^*\ （磅/英寸）\\
w&=\frac{v_0 R_p^2}{\mu}w^*=0.104w^*\ （英寸）\\
r&=R_p x=0.15x\ （英寸）
\end{aligned}\right\} \tag{7.66}$$

我们从图 7-6 中可以看到，$\tau=1$（$t=2.88\times10^{-6}$ 秒）时，最大剪应力为 123,000 磅/英寸²；在 $\tau=10$（$t=2.88\times10^{-5}$秒）时，最大剪应力为 7000 磅/英寸²，从图 7-7 中可以看到，$\tau=1$ 时，最大位移只有 0.05 英寸。这就是说，由于粘塑性的影响，撞击开始时，应力很高而位移不大，随着时间的推移，应力迅速降低，但位移有相应的增大。这个理论是在假定靶板各层的位移相同的基础上进行的，但图 7-9 的实测结果指出，靶板各层的位移虽然分别不大，但实际上并不相等。当然，这些位移有轴对称性，其形状也大体上和理论形状相合。

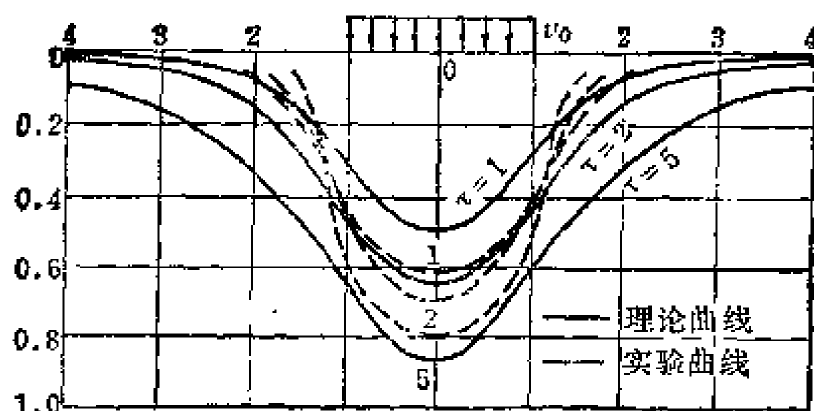


图7-9　$\tau=1,2,5$ 时，理论无量纲量位移和 x 的关系

曲线 1 — $z=0.08$ 英寸（在0.08英寸处测得）；

曲线 2 — $z=0.31$ 英寸；

曲线 3 — $z=0.38$ 英寸。

当然，这个理论有两大缺点：其一是剪应力在任何时间（$t=0$ 除外）都是在无穷远处渐近地趋近于零的。但实际上撞击的影响应该是以一定速度向外传播的。这种不合理的结论，是由不合理的边界条件（7.47）所引起的。我们可以引进塑性波波速

$$c_1=\frac{\mu}{\rho_t R_p} \tag{7.67}$$

来克服这个困难。塑性波在 t 时达到的径向距离 r_1 为

$$r_1=R_p+\frac{\mu}{\rho_t R_p}t \tag{7.68}$$

设引进无量纲坐标 $x_1=\frac{r_1}{R_p}=\xi$ 来代替时间坐标 t，其中关系为

$$\xi=1+\frac{\mu}{\rho_t R_p^2}t,\quad 0\leqslant x\leqslant\xi \tag{7.69}$$

在采用了无量纲量 v^*、x 和 ξ 后，（7.46）为

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial v^*}{\partial x}=\frac{\partial v^*}{\partial \xi},\quad 0\leqslant x\leqslant\xi,\quad 1\leqslant\xi \tag{7.70}$$

边界条件（7.48）可以写成

$$v^*(x,\ \xi)=0,\ \text{在}\ x=\xi,\quad 1\leqslant\xi \tag{7.71}$$

解（7.56）可以写成

$$\sigma^*(x,\ \xi)=\frac{1}{2\xi}e^{-\frac{x^2+1}{4\xi}}I_1\left(\frac{x}{2\xi}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\xi,\quad 1\leqslant\xi \tag{7.72}$$

同样有（7.58），即

$$v(x,\ \xi)=v_0\int_0^x\sigma^*(x_1,\ \xi)dx_1+g(\xi),$$
$$0\leqslant x\leqslant\xi,\quad 1\leqslant\xi \tag{7.73}$$

（7.71）可以写成

$$v(\xi,\ \xi)=v_0\int_0^\xi\sigma^*(x_1,\ \xi)dx_1+g(\xi)=0,\quad 1\leqslant\xi \tag{7.74}$$

于是

$$v(x,\ \xi)=-v_0\int_x^\xi\sigma^*(x_1,\ \xi)dx_1,\quad 0\leqslant x\leqslant\xi,\quad 1\leqslant\xi \tag{7.75}$$

把（7.72）代入（7.75），并把 $v(x,\ \xi)$ 写成无量纲形式：

$$v^*(x,\ \xi)=\frac{v(x,\ \xi)}{2v_0}$$
$$=-\frac{1}{\xi}e^{-\frac{1}{2\xi}}\int_x^\xi e^{-\frac{x_1^2}{4\xi}}I_1\left(\frac{x_1}{2\xi}\right)dx_1$$
$$0\leqslant x\leqslant\xi,\quad \xi\geqslant1 \tag{7.76}$$

（7.76）和（7.61）相比，仅在于：（1）ξ 换取了 τ；（2）积分号上 ξ 换取了 ∞。

我们必须指出，由于 $1\leqslant\xi$，所以不论 $\sigma^*(x,\ \xi)$ 和 $v^*(x,\ \xi)$ 都没有奇点。

同样，我们可以计算位移

$$w^*(x,\ \xi)=\frac{w\mu}{v_0\rho_t R_p^2}$$
$$=-\int_0^\xi e^{-\frac{1}{4\xi_1}}\left[\int_{\frac{x}{2\xi_1}}^{\frac{1}{2}}e^{-\gamma^2\xi_1}I_1(\gamma)d\gamma\right]d\xi_1$$
$$0\leqslant x\leqslant\xi,\quad \xi\geqslant1 \tag{7.77}$$

用上面的处理，变形和应力都只发生在塑性波到达的区域以内，前面所说的问题，就算消除了。

第二个缺点是，位移当时间增加时是不断地增加的。这是因为我们在这个理论中没有关于中止运动的机构，也即是说，在整个计算中，既没有使用方程式（7.48），也没有使用破坏强度的观念。因此，毕推尔-台维斯和其它类似的计算是极不完善的。

但这些计算结果，的确反映了撞击开始后的短时间内的情况。有不少实验结果表明这些计算在撞击初开始短时间内是适用的。

还有人用特征线法和拉普拉斯变换方法[7-9,7-10]，在比较合理的条件下进行了研究。P. C. 周[7-8]也用拉普拉斯变换处理了有（7.48）条件的本问题，他的计算使用了渐近展开，所以，也只能用于短期间之内。在他的计算中，使用了弹体、靶体的共同速度作为初速度，即

$$\bar{v}_0=\frac{M_p}{M_t+M_p}v_0 \tag{7.78}$$

还有人[7-11,7-14]用级数展开研究了本问题，也只能适用于短时间。

本书作者曾提出了下列计算方案[7-15]：作者认为在撞接触区域内，靶板主要是压缩变形，对于主要是剪应力的理论不适用。在接触区域内，$v(r,\ t)$ 应该和 r 无关。$w(r,\ t)$ 也和 r 无关，而在接触区域以外的区域，剪应力为主的粘塑性理论是适用的。

用无量纲时间坐标 ξ 和无量纲空间坐标 x，运动方程为

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial v^*}{\partial x}=\frac{\partial v^*}{\partial \xi}\quad 1\leqslant x\leqslant\xi,\ \ 1\leqslant\xi \tag{7.79}$$

边界条件为（7.48）和（7.71），用无量纲量表示，为

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{L}{h_t}\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)\frac{\partial v^*}{\partial \xi}=\frac{\partial v^*}{\partial x}\quad（在\ x=1,\ \ 1\leqslant\xi）\tag{7.80a}$$

$$v^*(x,\ \xi)=0\qquad（在\ x=\xi,\ \ 1\leqslant\xi）\tag{7.80b}$$

起始条件为

$$\frac{v}{v_0}=v^*(x,\ \xi)=\frac{M_p}{M_t+M_p}=\frac{1}{1+\dfrac{h_t\rho_t}{L\rho_p}},\ \text{在}\ x=1,\ \xi=1$$

(7.81)

挤凿脱离条件为 $\sigma_{rx}=\sigma_{SU}=$剪切极限强度（在 $r=R_p$），亦可以写成

$$\frac{\partial v^*}{\partial x}=\frac{R\sigma_{SU}}{\mu v_0},\ \text{在}\ x=1,\ 1\leqslant\xi \tag{7.82}$$

(7.79) 在 (7.80a, b)、(7.81)、(7.82) 条件的解就是本问题的全部解。本问题可以用前面相类似的方法求解。详细计算另文公布。

§7.3 尖头弹体对薄靶板的扩孔问题

对于锥角很小的尖头弹体面言，弹体的尖头很快就戳穿了薄靶板。当弹体前进时，主要是一个扩孔过程，只要锥角不大，有很大一部分靶体材料只有径向位移，轴向运动基本上可以略去不计。卵形弹头的击穿一般也属于这类。当然在卵形弹头尖端附近，靶体也有显著的轴向位移；对于钝型的卵形弹头而言，轴向运动更显著。穿透都是从弹尖开始的，以后就是扩孔过程。扩孔过程主要可以分为两类：（1）顺着弹头前进，靶体材料顺着弹头截面扩大而挤向四周，弹孔逐步扩大，是一种塑性扩孔过程，一切延展性较强的塑性材料，都是这种过程；（2）当弹孔扩大时，产生径向裂缝，裂缝处于松弛环向应力状态，逐步向外扩展，形成背面的花瓣型孔口。对于延展性较差的材料，一般都属于这一类。

根据不同的扩孔过程，尖头弹体的击穿运动有不同的模式。对于塑性扩孔问题而言，一般都用弹塑性理论决定钻孔中的塑性变形功，用能量守恒定律，就能决定弹体的运动。对于花瓣型孔口而言，应力的影响可以略去，对弹体运动影响最大的是花瓣运动的动量，因此，研究弹体运动主要用动量守恒定律。还有一些其

它理论，把作用在弹体上的力分为惯性力、压缩变形的反作用力和摩擦力，研究这些力、变形，以及变形速度之间的关系。

下面几节将分别介绍这些理论。

§7.4 尖头弹体对薄靶板的泰勒塑性扩孔理论(1948)[7-17]

把靶板作为一块无穷大的弹性-完全塑性薄片来处理，把弹体运动作为准静力的轴对称扩孔来处理的，首先是德国的培堆(1941)[7-16]，后经英国 G.I. 泰勒[7-17]修正了理论上的一些基本缺陷而完成的。现在让我们详细介绍泰勒扩孔理论。

泰勒认为扩孔过程中的有限应变，是一步步地由微小的应变累积而成的。为了研究这些微小的应变，我们必先研究在未变形前原来处于离中心微孔 s 处的材料，当孔的半径从 b 扩大到 $b+\delta b$时的微小应变。泰勒在分析这个问题时，提出了一个扩孔过程中的孔壁厚度相似律（图 7-10）。如果孔口半径为 b_1，孔壁某处的厚度为h^*，该处材料来自原来薄板离轴 s_1 处（图 7-10b）。当孔壁半径扩大到 b_2 时，孔壁某处的厚度也是 h^*，这处的材料来自原薄板离轴 s_2 处（图 7-10c），而且 s_2 大于 s_1。泰勒的扩孔壁厚相似律，可以写成

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{b_1}{b_2} \tag{7.83}$$

根据这个变形相似律：设在原来靶板离轴 s 处的材料，在扩孔过程中产生了径向位移 u，这些材料移到孔壁后的壁厚为 h，原来的壁厚为 h_t，孔的半径为 b，则我们有

$$\frac{h}{h_t}=f_1\left(\frac{s}{b}\right),\quad \frac{u}{b}=f_2\left(\frac{s}{b}\right) \tag{7.84}$$

现在让我们研究弹孔的孔径从 b 扩大到 $b+\delta b$时的其它各点的扩展。图 7-11 为 r 和 u 的关系曲线。当弹孔半径为从 b 扩展到δb时，（r，u）曲线从 P_0AQ_0 扩展到 P_1BCQ_1。其中 P_0P_1在 r 轴上的投影为 δb，原来离轴 s 处的P点，发生了水平位移 u，

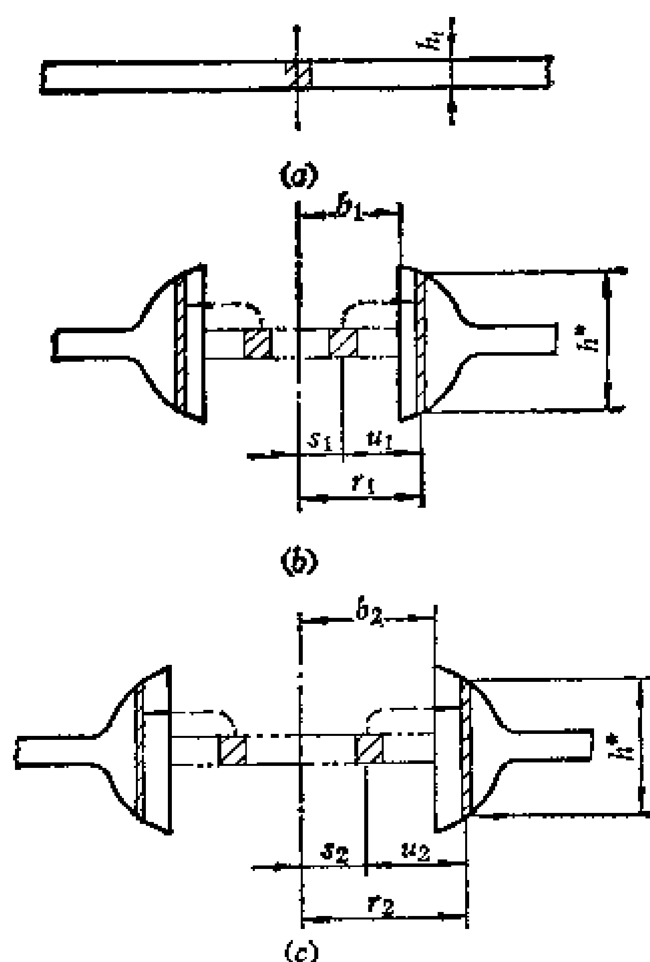


图7-10　孔壁形状，扩孔壁厚相似律

(h^*相同时，$s_2/s_1=u_2/u_1=r_2/r_1=b_2/b_1$)

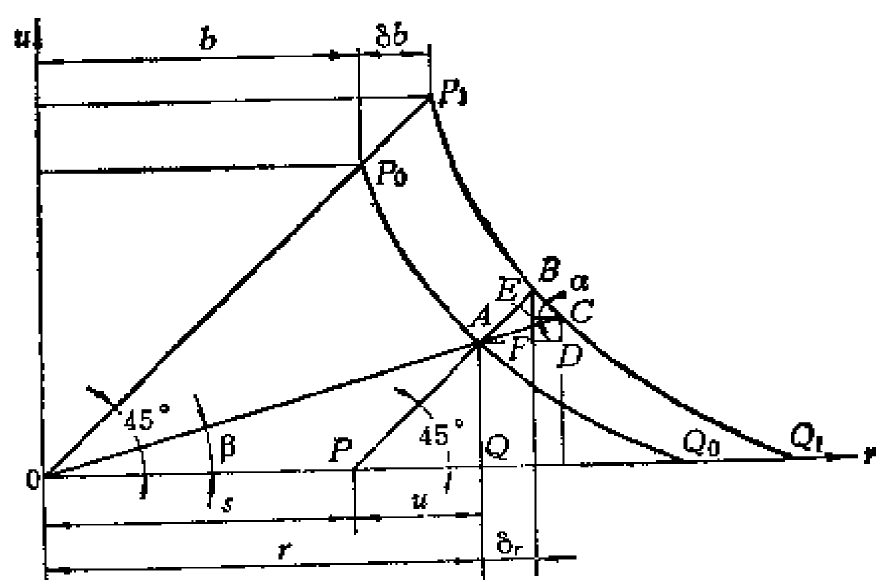


图7-11　弹孔半径从b扩展到$b+\delta b$时（r，u）曲线扩展到（$r+\delta r$，$u+\delta u$）曲线的几何关系

达到了弹体某点的半径 r，

$$r = s + u \tag{7.85}$$

在弹孔扩展到 $b+\delta b$ 时，A 点顺着 45° 线扩展到 B 点。扩孔相似律告诉我们，曲线 P_0AQ_0 的长度和曲线 P_1ACQ_1 的长度之比等于 b 和 $b+\delta b$ 之比。这就要求 OP_0P_1 线和 OAC 线上的两段之间的比例关系相同，而且和 sb/b 相同，也即设

$$\frac{P_1P_0}{P_0O} = \frac{CA}{AO} = \frac{\delta b}{b} \tag{7.86}$$

但，从△OAQ 和△ACD 的相似性，我们有 $\frac{CA}{AO} = \frac{AD}{OQ} = \frac{AD}{r}$，于是（7.86）可以写成

$$\frac{AD}{r} = \frac{\delta b}{b} \tag{7.86a}$$

当 $\frac{\delta b}{b}$ 足够小时，CB 可以当作为直线，其斜度为 $\pi-\alpha$，于是

$$\tan\alpha = -\frac{\partial u}{\partial r} \tag{7.87}$$

同时，从△OAQ，有

$$\tan\beta = \frac{u}{r} \tag{7.88}$$

从 $ABCD$ 的几何学中，我们有

$$\begin{aligned}\delta r = AF = BF &= CE\tan\alpha + DA\tan\beta \\ &= (AD-\delta r)\tan\alpha + AD\tan\beta\end{aligned} \tag{7.89}$$

解出 δr，得

$$\delta r = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1+\tan\alpha}\,AD = \frac{\dfrac{u}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial r}}{1-\dfrac{\partial u}{\partial r}}AD \tag{7.90}$$

从（7.86 a）和（7.90）中消去 AD，得

$$\delta r=\frac{\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}}{1-\frac{\partial u}{\partial r}}r\frac{\delta b}{b} \tag{7.91}$$

从 b 扩展到 $b+\delta b$ 的过程中，材料的径向应变为

$$\frac{\partial}{\partial r}(\delta r)=-\left[\frac{\left(1-\frac{u}{r}\right)r}{\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right]\frac{\delta b}{b} \tag{7.92}$$

从 b 扩展到 $b+\delta b$ 的过程中，所有应变必与 $\delta b/b$ 成正比。所以，我们定义 ϵ_r、ϵ_θ，使上述有关应变分量为 $\epsilon_r\frac{\delta b}{b}$、$\epsilon_\theta\frac{\delta b}{b}$，也即是说

$$\epsilon_r=\frac{b}{\delta b}\frac{\partial}{\partial r}(\delta r)=-\frac{\left(1-\frac{u}{r}\right)r}{\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \tag{7.93a}$$

$$\epsilon_\theta=\frac{b}{\delta b}\frac{\delta r}{r}=\frac{\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}}{1-\frac{\partial u}{\partial r}} \tag{7.93b}$$

根据不可压缩的塑性假定

$$\epsilon_z=-\epsilon_r-\epsilon_\theta \tag{7.93c}$$

根据变形连续条件，原来在 s 处的材料，其体积为 $2\pi s ds h_0$。在扩孔后变为在 r 处的材料，其体积为 $2\pi r dr h$。这两个体积应该相等（即不可压缩性），则有

$$h_0 s ds=hrdr \tag{7.94}$$

但是 $s=r-u$，$ds=dr-du=\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr$，所以（7.94）式可以写成

$$\frac{h}{h_0}=\left(1-\frac{u}{r}\right)\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{7.95}$$

对 (7.95)，得

$$\frac{1}{h_0}\frac{\partial h}{\partial r}=-\left(1-\frac{u}{r}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2(\epsilon_r+\epsilon_\theta)$$

$$=-\epsilon_z\frac{1}{r}\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \qquad (7.96)$$

从 (7.96) 和 (7.95) 中消去 h_0，得

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial r}=-\epsilon_z\frac{1-\dfrac{\partial u}{\partial r}}{r-u} \qquad (7.97a)$$

或可写成

$$\epsilon_z=-\frac{\dfrac{\partial}{\partial r}(\ln h)}{\dfrac{\partial}{\partial r}[\ln(r-u)]} \qquad (7.97b)$$

(7.93a、b、c）也可以用新的变量来简化。设

$$\xi=r^2,\quad \eta=s^2=(r-u)^2 \qquad (7.98)$$

并称

$$p=\frac{d\eta}{d\xi},\qquad q=\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \qquad (7.99)$$

则 (7.93a、b、c）和 (7.95) 可以化为

$$\epsilon_r=-1+\frac{2\eta q}{p^2}+\frac{\eta}{\xi q} \qquad (7.100a)$$

$$\epsilon_\theta=1-\frac{\eta}{\xi q} \qquad (7.100b)$$

$$\epsilon_z=-\frac{2\eta q}{p^2} \qquad (7.100c)$$

$$h/h_0=p \qquad (7.100d)$$

应力平衡问题的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial r}(h\sigma_r)+\frac{h(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}=0 \tag{7.101}$$

这里有两种屈服条件：

（1）摩尔条件

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_\theta-\sigma_r=\sigma_Y,\ \text{如果}\ \sigma>0,\ \sigma_Y\ \text{为张力}\\ -\sigma_r=\sigma_Y,\ \text{如果}\sigma_\theta<0,\ \sigma_Y\ \text{为压应力}\end{array}\right\} \tag{7.102}$$

（2）冯密西斯条件（$\sigma_z=0$）

$$\sigma_r^2+\sigma_\theta^2-\sigma_r\sigma_\theta=\sigma_Y^2 \tag{7.103}$$

当 σ_θ 等于零时，化为 $\sigma_r=-\sigma_Y$，这就和摩尔条件一致。

本构关系采用冯密西斯关系

$$\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{\epsilon_r-\epsilon_\theta}=\frac{\sigma_\theta-\sigma_z}{\epsilon_\theta-\epsilon_z}=\frac{\sigma_z-\sigma_r}{\epsilon_z-\epsilon_r} \tag{7.104}$$

在本题中，$\sigma_z=0$，$\epsilon_z=-\epsilon_r-\epsilon_\theta$，于是有

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_r}=\frac{\epsilon_\theta-\epsilon_z}{\epsilon_r-\epsilon_z}=\frac{\epsilon_r-2\epsilon_\theta}{\epsilon_\theta+2\epsilon_r} \tag{7.105}$$

把（7.105）代入（7.101），并用新的变量（7.98），得

$$2\frac{d}{d\xi}(p\sigma_r)+\frac{p\sigma_r}{\xi}\left(\frac{\epsilon_r-\epsilon_\theta}{2\epsilon_r+\epsilon_\theta}\right)=0 \tag{7.106}$$

让我们把它和摩尔屈服条件（7.102）放在一起来研究，这里有两种情况：

（1）设 $\sigma_\theta<0$，则有 $\sigma_r=-\sigma_Y$，于是（7.106）可以写成

$$2q+\frac{p}{\xi}\left(\frac{\epsilon_r-\epsilon_\theta}{2\epsilon_r+\epsilon_\theta}\right)=0 \tag{7.107}$$

（2）设 $\sigma_\theta>0$，则有 $\sigma_\theta-\sigma_r=\sigma_Y$，把它和（7.105）放在一起求解，得

$$\sigma_r=\frac{2\epsilon_r+\epsilon_\theta}{\epsilon_r-\epsilon_\theta}(-\sigma_Y),\quad \sigma_\theta=\frac{2\epsilon_\theta+\epsilon_r}{\epsilon_r-\epsilon_\theta}(-\sigma_Y) \tag{7.108}$$

而（7.106）可以写成

$$2\frac{d}{d\xi}\left[p\left(\frac{2\epsilon_r-\epsilon_\theta}{\epsilon_r-\epsilon_\theta}\right)\right]+\frac{p}{\xi}=0 \tag{7.109}$$

把（7.100）代入（7.107）和（7.109），分别得：

$\sigma_\theta < 0$ （环向压缩）

$$q^2\left(\frac{4\eta}{p^2}\right)+q\left(-1+\frac{2\eta}{\xi p}\right)+\frac{p}{\xi}\left(-1+\frac{\eta}{\xi p}\right)=0 \tag{7.110}$$

而

$$\frac{\epsilon_\theta}{\epsilon_r}=\frac{4q+\dfrac{p}{\xi}}{-2q+\dfrac{p}{\xi}},\quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_r}=1-\frac{2q\xi}{p} \tag{7.111}$$

用摩尔准则，有

$$\sigma_r=-\sigma_Y,\quad \sigma_\theta=-\sigma_Y\frac{\sigma_\theta}{\sigma_r}=-\sigma_Y\left(1-\frac{2q\xi}{p}\right) \tag{7.112}$$

$\sigma_\theta > 0$ （环向拉伸）

$$\begin{aligned}3w\frac{\eta}{p^2}\left(p-\frac{\eta}{\xi}\right)=&\frac{4\eta^2q^3}{p^4}+q^2\left(\frac{3\eta^2}{\xi p^3}+\frac{\eta}{p^2}\right)\\&+2q\left(-1+\frac{3\eta^2}{\xi^2p^2}-\frac{2\eta}{\xi p}\right)\\&+\frac{p}{\xi}-\frac{2\eta}{\xi^2}+\frac{\eta^2}{\xi^3p}\end{aligned} \tag{7.113}$$

其中

$$w=\frac{dq}{d\xi}=\frac{d^3\eta}{d\xi^3} \tag{7.114}$$

而

$$\frac{\epsilon_\theta}{\epsilon_r}=\frac{1-\dfrac{\eta}{\xi p}}{-1+\dfrac{2\eta q}{p^2}+\eta\xi p},\quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_r}=\frac{6\eta q}{4\eta q-p^2+\dfrac{\eta p}{\xi}}-1 \tag{7.115}$$

在用了摩尔准则 $\sigma_r-\sigma_\theta=-\sigma_Y$ 后，有

$$\sigma_r=-\left\{\frac{\sigma_Y}{2-\dfrac{6\eta q}{4\eta q-p^2+\dfrac{\eta p}{\xi}}}\right\} \tag{7.116a}$$

$$\sigma_\theta = -\sigma_Y \left\{ \frac{\dfrac{6\eta q}{4\eta q - p^2 + \dfrac{\eta p}{\xi}} - 1}{2 - \dfrac{6\eta q}{4\eta q - p^2 + \dfrac{\eta p}{\xi}}} \right\} \tag{7.116b}$$

我们看到（7.110）是η的二阶二次常微分方程，而（7.113）是η的三阶一次常微分方程。这种差别完全是由不同的摩尔条件形成的。

不论（7.110）或（7.113），都已写成了数值积分的形式。当$\sigma_\theta > 0$时，我们有三个边界条件，因此只要在某一ξ值（即某一r值）给出u/r、h/h_0、σ_r值，就可以积分了。当$\sigma_\theta < 0$时，σ不能随意给出，它是某一常数，于是应该给出在某一点ξ的p和η值。

现在让我们研究整个靶板的应力应变和位移。我们可以把靶体分成三部分：（1）$r_1 \leqslant r < \infty$，弹性部分（或$\xi_1 \leqslant \xi < \infty$），在这里，$\sigma_\theta > 0$。这就要求在它相邻的塑性部分中用$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_Y$的摩尔准则。（2）$r_2 \leqslant r \leqslant r_1$（亦即$\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$），在这个塑性部分内，$0 \leqslant \sigma_\theta$，用（7.113）积分。当$\sigma_\theta$达到零时，即和$\sigma_r = -\sigma_Y$的摩尔准则部分相连接。（3）$b \leqslant r \leqslant r_2$（亦即$1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$），在这里$\sigma_\theta < 0$，也是塑性部分，用（7.110）积分。

（1）**弹性区域$\xi_1 \leqslant \xi < \infty$**

弹性平面问题的应力和位移为

$$-\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_Y r_1^2 / r^2 \tag{7.117}$$

$$u = \frac{1}{2}(1 + \nu)\frac{\sigma_Y}{E}\ \frac{r_1^2}{r} \tag{7.118}$$

其中r_1为满足屈服条件$(\sigma_\theta > 0)\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_Y$的半径；$E$为杨氏模量；$\nu$为泊桑比。在这里，我假设材料是不可压缩的，所以$\nu = \dfrac{1}{2}$，

于是

$$\eta = r^2\left(1-\frac{u}{r}\right)^2 = r^2\left(1-\frac{3}{4}\ \frac{\sigma_Y}{E}\ \frac{r_1^2}{r^2}\right)$$

$$= \xi\left(1-\frac{3}{4}\ \frac{\sigma_Y}{E}\ \frac{r_1^2}{\xi}\right) \qquad (7.119)$$

而

$$p=\frac{d\eta}{d\xi}=1, \qquad q=\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0 \qquad (7.120)$$

在弹塑性交界处 $\xi=\xi_1=r_1^2$，我们有

$$\xi=\xi_1,\ \ \eta_1=\xi_1\left(1-\frac{3}{4}\ \frac{\sigma_Y}{E}\right), p_1=1, q_1=0 \qquad (7.121)$$

现在让我们研究弹塑性交界处（$\xi=\xi_1$）的连续条件。从物理观点看 u、$\frac{\partial u}{\partial r}$、$\sigma_r$必须连续。所以，由 u、$\frac{\partial u}{\partial r}$连续，可以肯定$\eta$、$p$是连续的。由$\sigma_r$必须连续，也即是说塑性区的解在$\xi=\xi_1$处，$\sigma_r=-\frac{\sigma_Y}{2}$。这从(7.116)知就必须要求$q(\xi_1)=0$。把它和（7.121）最后一个条件相比，证明了$q_1$也是连续的。所以（7.121）三个条件，就是求解微分方程（7.113)的初始条件。这里必须指出，在弹、塑性区交界面上，$\sigma_\theta=-\frac{\sigma_Y}{2}$也是连续的。但这只是一种巧合。

（2）求解塑性区$\sigma_\theta\geqslant 0$（$\xi_1\geqslant\xi\geqslant\xi_2$）的方程式（7.113）

现在让我们以

$$\alpha=\frac{3}{4}\ \frac{\sigma_Y}{E} \qquad (7.122)$$

为小量，把解展开为α的级数，取α^0，α^1，α^2三项。设

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \xi\left(1-\alpha\eta_{(1)}+\alpha^2\eta_{(2)}+\cdots\right)\\ p &= 1+\alpha p_{(1)}+\alpha^2 p_{(2)}+\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (7.123)$$

其中$\eta_{(1)}$，$\eta_{(2)}\cdots$，$p_{(1)}$，$p_{(2)}\cdots$为待定的ξ的函数。但

$$p=\frac{d\eta}{d\xi}=1-\alpha\eta_{(1)}-\alpha\xi\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi}+\alpha^2\left(\eta_{(2)}+\xi\frac{d\eta_2}{d\xi}\right)+\cdots$$

$$(7.124)$$

所以

$$p_{(1)}=-\eta_{(1)}-\xi\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi},\qquad p_{(2)}=\eta_{(2)}+\xi\frac{d\eta_{(2)}}{d\xi}\cdots \tag{7.125}$$

而 q 则也可以展开为 α 的级数

$$q=\alpha q_{(1)}+\alpha^2 q_{(2)}+\cdots \tag{7.126}$$

以及

$$q=\frac{dp}{d\xi}=\alpha\frac{dp_{(1)}}{d\xi}+\alpha^2\frac{dp_{(2)}}{d\xi}+\cdots \tag{7.127}$$

于是得

$$\left.\begin{aligned} q_{(1)}&=\frac{dp_{(1)}}{d\xi}=-2\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi}-\xi\frac{d^2\eta_{(1)}}{d\xi^2}\\ q_{(2)}&=\frac{dp_{(2)}}{d\xi}=-2\frac{d\eta_{(2)}}{d\xi}-\xi\frac{d^2\eta_{(2)}}{d\xi^2}\end{aligned}\right\} \tag{7.128}$$

当$\sigma_\theta>0$时，(7.116b) 应该写成

$$\sigma_r=-\frac{1}{2}\sigma_Y\left\{\frac{-p+\dfrac{\eta}{\xi}+\dfrac{4\eta q}{p}}{-p+\dfrac{\eta}{\xi}+\dfrac{\eta q}{p}}\right\}=-\sigma_Y\left(\frac{2\epsilon_r+\epsilon_\theta}{\epsilon_r-\epsilon_\theta}\right) \tag{7.129}$$

把 (7.123)、(7.127) 代入 (7.129)，保留首项，得

$$\sigma_r=-\frac{1}{2}\sigma_Y\left\{\frac{3\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}}{\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}+\xi\dfrac{d^2\eta_{(1)}}{d\xi^2}}+4\right\}+\alpha\{\cdots\} \tag{7.130}$$

把 (7.124) 和 (7.130) 代入 (7.109)，得

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}}{\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}+\xi\dfrac{d^2\eta_{(1)}}{d\xi^2}}\right\}+\frac{1}{3\xi}=0 \tag{7.131}$$

积分，得

$$\frac{\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}}{\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}+\xi\dfrac{d^2\eta_{(1)}}{d\xi^2}}+\frac{1}{3}\ln\xi=\text{const}\cdot C_1 \qquad (7.132)$$

从 $\xi=\xi_1$ 处的边界条件 $q_1=0$，我们有 $q_{(1)}=0$。于是从(7.128)式，有 $\xi\dfrac{d^2\eta_{(1)}}{d\xi^2}=-2\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}$（在 $\xi=\xi_1$），从（7.132)可得

$$-1+\frac{1}{3}\ln\xi_1=C_1 \qquad (7.133)$$

从（7.132）和（7.133）中消去 C_1，得

$$\frac{\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}}{\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}+\xi\dfrac{d^2\eta_{(1)}}{d\xi^2}}+\frac{1}{3}\ln\frac{\xi}{\xi_1}+1=0 \qquad (7.134)$$

引入新变量

$$\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi}=\psi,\quad \zeta=\ln\frac{\xi}{\xi_1} \qquad (7.135)$$

(7.134）可以写成

$$\frac{\psi'}{\psi}=-\frac{6+\zeta}{3+\zeta}\quad \psi'=\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \qquad (7.136)$$

积分得

$$\ln\psi+\zeta+3\ln(3+\zeta)=\text{const}\cdot C_2 \qquad (7.137)$$

把（7.135）的第二式代入（7.137)，得

$$\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi}\ \frac{\xi}{\xi_1}\left(3+\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right)^3=C_2^*=e^{C_2} \qquad (7.138)$$

从（7.121）第三式代入（7.123)，可知在 $\xi=\xi_1$ 时 $p_{(1)}=0$，所以从（7.125）式有 $\xi\dfrac{d\eta_{(1)}}{d\xi}\Big|_{\xi=\xi_1}=-\eta_{(1)}\Big|_{\xi_1}$。但从(7.121)代入(7.123）的第一式，得 $\eta_{(1)}|_{\xi=\xi_1}=1$，最后得

$$\xi\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi}\Big|_{\xi=\xi_1}=-1 \qquad (7.139)$$

把 $\xi=\xi_1$ 代入（7.138)，得

$$-\frac{1}{\xi_1}(3)^3=C_2^* \tag{7.140}$$

把（7.140）中的 C_2^* 代入（7.138），给出

$$\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi}\xi\left(1+\frac{1}{3}\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right)^3=-1 \tag{7.141}$$

再用变量 $\zeta=\ln\frac{\xi}{\xi_1}$，上式写成

$$\frac{d\eta_{(1)}}{d\zeta}=-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\zeta\right)^3} \tag{7.142}$$

积分给出

$$\eta_{(1)}=\frac{3}{2\left(1+\frac{1}{3}\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right)^2}+\text{const}\cdot C_3 \tag{7.143}$$

在 $\xi=\xi_1$ 时，$\zeta=\ln\frac{\xi}{\xi_1}=0$，$\eta_{(1)}=1$，所以 $C_3=-\frac{1}{2}$。

（7.143）可以写成

$$\eta_{(1)}=\frac{3}{2\left(1+\frac{1}{3}\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right)^2}-\frac{1}{2} \tag{7.144}$$

厚度方程为

$$\begin{aligned}\frac{h}{h_t}=\frac{d\eta}{d\xi}&=1-\alpha\left[\eta_{(1)}+\xi\frac{d\eta_{(1)}}{d\xi}\right]+\cdots\\&=1+\alpha\left[\frac{1}{2}-\frac{1+\ln\frac{\xi}{\xi_1}}{2\left(1+\frac{1}{3}\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right)^3}\right]+O(\alpha^2)\end{aligned} \tag{7.145}$$

从 η 的定义（7.119），解出 u，

$$u=\xi^{1/2}-\eta^{1/2} \tag{7.146}$$

从（7.123）第一式，有

$$\eta^{1/2}=\xi^{1/2}(1-\alpha\eta_{(1)})^{1/2}=\xi^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\eta_{(1)}+\cdots\right) \tag{7.147}$$

于是 (7.146) 可以写成

$$u=-\frac{1}{2}\alpha\eta_{(1)}\xi^{1/2}=\frac{1}{4}\alpha\xi^{1/2}\left\{\frac{3}{\left(1+\frac{1}{3}\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right)^2}-1\right\} \tag{7.148}$$

把 (7.144) 代入 (7.130)，整理后，我们得到

$$\sigma_r=-\frac{1}{2}\sigma_Y\left\{1-\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right\} \tag{7.149a}$$

而

$$\sigma_\theta=\sigma_Y-\sigma_r=\frac{1}{2}\sigma_Y\left\{1+\ln\frac{\xi}{\xi_1}\right\} \tag{7.149b}$$

（3）决定 $\sigma_\theta\geqslant 0$ 和 $\sigma_\theta\leqslant 0$ 两个塑性区的交界点 $\xi=\xi_2$

决定交界点的条件为$\sigma_\theta=0$。从 (7.149b)，这一交界点为

$$\xi_2=\xi_1 e^{-1}=0.3679\xi_1 \tag{7.150a}$$

或

$$r_2=r_1 e^{-\frac{1}{2}}=0.6065r_1 \tag{7.150b}$$

从 (7.148) 得

$$u(\xi_2)=\frac{23}{16}\alpha\xi_2^{1/2}=\frac{23}{16}\alpha r_2,\quad 当\ \xi\to\xi_2(\xi\geqslant\xi_2) \tag{7.151}$$

而且从 (7.149a)

$$\sigma_r=-\sigma_Y,\quad \xi=\xi_2 \tag{7.152}$$

还有从 (7.128)

$$(q\xi)_{\xi=\xi_2}=-\frac{27}{16}\alpha,\quad 当\ \xi\to\xi_2\ (\xi>\xi_2) \tag{7.153}$$

同样，我们有

$$\frac{\eta}{\xi}=1-\alpha\eta_1=1-\frac{23}{8}\alpha,\quad p=\frac{h}{h_t}=1+\frac{1}{2}\alpha,$$
$$当\ \xi\to\xi_2\ (\xi\geqslant\xi_2) \tag{7.154}$$

在 $\xi=\xi_2$处（$\sigma_\theta=0$ 处），p 和 η 是连续的。如果把（7.154）的 p、η 值代入$\sigma_\theta<0$ 区域的平衡方程（7.110），即可推得

$$(q\xi)^2\frac{4-\frac{23}{3}\alpha}{\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)^2}+q\xi\frac{1-\frac{25}{4}\alpha}{1+\frac{1}{2}\alpha}-\frac{27}{8}\alpha=0 \quad (7.155)$$

其解有两个：

$$q\xi=\frac{27}{8}\alpha,\quad q\xi=-\frac{1}{4}-\frac{85}{32}\alpha,\quad 当\ \xi\to\xi_2(\xi\leqslant\xi_2) \quad (7.156)$$

这两个值都和（7.153）的$-27\alpha/16$不相等。因此，q 在 $r=r_0$ 处不连续。这两个值一个是正，另一个是负。由于

$$q=\frac{dp}{d\xi}=\frac{1}{h_r}\frac{dh}{d\xi}=\frac{1}{2h_r r}\frac{dh}{dr} \quad (7.157)$$

q 如果是正的，就是说越向外越厚，显然不合理的。所以，在$\sigma_\theta<0$的区域内，$q\xi$在ξ_2处的边值为

$$q\xi=-\frac{1}{4}-\frac{85}{32}\alpha \quad (7.158)$$

我们也可以证明ε_r、σ_θ在ξ_2处都不连续。

把（7.154）、（7.158）代入（7.100）即得在$\sigma_\theta<0$ 的区域内的$\xi=\xi_2$处的ϵ_r、ϵ_θ的边界值

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_r&=\frac{27}{8}\alpha\\ \epsilon_\theta&=-\frac{1}{2}-\frac{27}{4}\alpha\end{aligned}\right\} \quad (7.159)$$

代入(7.105)，得该处的σ_θ/σ_r

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_r}=\frac{1}{2}-\frac{81}{16}\alpha \quad (7.160)$$

如果α很小，可以略去，则在$\xi=\xi_2$处

$$p=1,\quad \frac{\eta}{\xi}=1,\quad q\xi=\frac{1}{4} \quad (7.161)$$

而应力边界值为

$$\sigma_r = -\sigma_Y, \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{2}\sigma_Y \tag{7.162}$$

这里可以看到σ_θ在$\xi=\xi_2$处从零值忽然变为$-\frac{1}{2}\sigma_Y$的跳跃。

（4）$r \leqslant r_2(\xi \leqslant \xi_2)$ 中应力和应变计算

用（7.110）计算积分只能用数值积分法。这里ξ_2的绝对值还没有决定，（7.150）给出的只是相对值。为此，我们将引入相对坐标

$$\tau = \frac{\xi}{\xi_2} = \frac{\xi}{r_2^2}, \quad \tau_2 = 1 \tag{7.163}$$

并且引入新的变量

$$\bar{q} = \xi_2 q, \quad \bar{p} = p, \quad \xi_2 \bar{\eta} = \eta \tag{7.164}$$

于是（7.110）可以写成

$$\bar{q}^2\left(-\frac{4\bar{\eta}}{\bar{p}^2}\right) + q\left(-1 + \frac{2\bar{\eta}}{\tau\bar{p}}\right) + \frac{\bar{p}}{\tau}\left(-1 + \frac{\bar{\eta}}{\tau\bar{p}}\right) = 0 \tag{7.165}$$

（7.110）的初值为

$$\bar{\eta} = \tau_2\left(1 - \frac{33}{8}\alpha\right) = \left(1 - \frac{33}{8}\alpha\right), \quad \bar{p} = 1 + \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{在 } \tau = \tau_2 = 1 \tag{7.166}$$

把（7.166）式代入（7.165），解出$\bar{q}$，有两个根。取负根

$$\bar{q} = -\frac{1}{4} - \frac{85}{32}\alpha, \quad \text{在 } \tau = \tau_2 = 1 \tag{7.167}$$

于是用（7.166）、（7.167）计算$\tau = 1 - \Delta\tau$的值，它是

$$\left.\begin{aligned} \bar{\eta}(1-\Delta\tau) &= \bar{\eta}(1) - \bar{p}\Delta\tau + \frac{1}{2}\bar{q}(\Delta\tau)^2 \\ \bar{p}(1-\Delta\tau) &= \bar{p}(1) - \bar{q}(1)\Delta\tau \end{aligned}\right\} \tag{7.168}$$

依此类推，一步一步地计算下去，一直到$\sigma_\theta = 0$（这时的$\tau = \xi/\xi_2 = 0.35$）。

从这时起又要改用（7.113），而η、p、q等都是连续的。把$\bar{\eta} = \eta/\xi_2 = 0.254$，$p = 1.450$，$\bar{q} = q\xi_2 = -2.070$，$\tau_2 = 0.35$代入（7.113），就可以计算$w$。如果把(7.113)式用下列无量纲量，

$$\bar{w} = w\xi_2^2, \quad \bar{q} = \xi_2 q, \quad \bar{p} = p, \quad \xi_2\bar{\eta} = \eta, \quad \tau\xi_2 = \xi \tag{7.169}$$

则 (7.113)可以写成

$$3\bar{w}\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}^2}\left(\bar{p}-\frac{\bar{\eta}}{\tau}\right)=\frac{4\bar{\eta}^2\bar{q}^3}{\bar{p}^4}+\bar{q}^2\left(\frac{3\bar{\eta}^2}{\tau\bar{p}^3}+\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}^2}\right)$$
$$+2\bar{q}\left(-1+\frac{3\bar{\eta}^2}{\tau^2\bar{p}^2}-\frac{2\bar{\eta}}{\tau\bar{p}}\right)$$
$$+\frac{\bar{p}}{\tau}-\frac{2\bar{\eta}}{\tau^2}+\frac{\bar{\eta}^2}{\tau^3\bar{p}} \qquad (7.170)$$

于是 $\Delta\tau$ 以后的 η、p、q 的增量 $\Delta\eta$、Δp、Δq 可以用下式计算

$$\left.\begin{aligned}\Delta\bar{\eta}&=\bar{p}\Delta\tau+\frac{1}{2}\bar{q}(\Delta\tau)^2+\frac{1}{6}\bar{w}(\Delta\tau)^3\\ \Delta\bar{p}&=\bar{q}\Delta\tau+\frac{1}{2}\bar{w}(\Delta\tau)^2\\ \Delta\bar{q}&=\bar{w}\Delta\tau\end{aligned}\right\} \qquad (7.171)$$

这样，可以一步一步地计算到 $\bar{\eta}=0$。这时的 $\eta=s^2=(\gamma-u)^2$ 为零，业已算到靶板中心。从 $\xi=\xi_2$ 计算到 $\eta=0$ 时的数值积分数据见（表 7-1）。

（5）孔边的条件($\xi=b^2$)

在接近孔边时，$-\bar{q}$ 和 $\bar{w}$ 增长都很快，即当 ξ 很小时，在 (7.113) 右边只有 $-2q$ 最大，在其左边，只有 $3w\eta/p$ 这一项最大，因此 (7.113)的极限形式为

$$\frac{3w\eta}{\bar{p}}=-2q \qquad (7.172)$$

这个方程可以积分两次，其结果为

$$\left.\begin{aligned}-q&=A\eta^{-2/3}\\ p^2&=B-6A\eta^{1/3}\end{aligned}\right\} \qquad (7.173)$$

A、B 为两个积分常数，取 $\tau=0.21$ 时的数值积分结果（见表 7-1）

$$\tau=0.21,\ \bar{\eta}=0.012,\ \bar{p}=2.326,\ \bar{q}=-23.22 \qquad (7.173\text{a})$$

代入 (7.172)，解 A、B，得

$$A\xi_2^{2/3}=1.217,\quad B=7.07 \qquad (7.174)$$

表7-1　从$\xi_2 \geqslant \xi \geqslant 0.205\xi_2$的计算结果

ξ/ξ_2	η/ξ_2	p	$-q\xi_2$	$w\xi_2^2$	r/b	u/b	σ_θ/σ_r	σ_r/σ_Y	σ_θ/σ_Y	
1.0	1.0	1.0	0.25		2.21	0	0.50	-1.0	-0.50	根据(7.110) $\sigma_\theta<0$
0.90	0.899	1.025	0.305		2.096	0.001	—	-1.0	-0.47	
0.80	0.795	1.055	0.381		1.978	-0.008	0.440	-1.0	-0.44	
0.75	0.741	1.075	0.431		1.915	0.012	0.397	-1.0	-0.40	
0.70	0.687	1.096	0.490		1.850	0.019	0.370	-1.0	-0.37	
0.65	0.632	1.121	0.566		1.782	0.024	0.343	-1.0	-0.34	
0.60	0.575	1.149	0.600		1.712	0.035	0.310	-1.0	-0.31	
0.50	0.437	1.257	0.998		1.563	0.070	0.212	-1.0	-0.21	
0.45	0.392	1.317	1.240		1.483	0.100	0.152	-1.0	-0.15	
0.40	0.325	1.379	1.583		1.398	0.138	0.082	-1.0	-0.08	
0.35	0.254	1.450	2.070		1.307	0.194	0.000	-1.0	0	
0.30	0.179	1.554	2.910		1.210	0.276	-0.124	-1.0	0.12	
0.35	0.254	1.450	2.070	26.5	1.307	0.194				根据(7.113) $\sigma_\theta>0$
0.30	0.178	1.587	3.397	57.3	1.210	0.278	-0.092	-0.916	0.084	
0.27	0.129	1.715	5.117	108.0	1.149	0.356	-0.168	-0.857	0.143	
0.24	0.075	1.917	8.357	281.0	1.483	0.478	-0.328	-0.753	0.247	
0.22	0.034	2.140	13.98	934.0	1.037	0.630	-0.569	-0.638	0.362	
0.21	0.012	2.326	23.22	5194.0	1.013	0.771	-0.739	-0.576	0.424	
0.205	0	2.61			1.000	1.000	-1.000	-0.500	0.500	

所以，当$\eta \to 0$时，p的极限值为

$$p_{\eta\to0}=\sqrt{B}=2.66 \tag{7.175}$$

现在让我们近似地决定$\eta=0$的τ值。设这个值为τ_0

$$\tau_0=0.21-\Delta\tau \tag{7.176}$$

$\Delta\tau$是由$\bar{\eta}_0=\bar{\eta}_1-\bar{p}_0\Delta\tau=0$决定的，$\Delta\tau=\dfrac{\bar{\eta}_1}{\bar{p}_0}=\dfrac{0.012}{2.66}$，于是

$$\tau_0=0.21-\frac{0.012}{2.66}=0.205 \tag{7.177}$$

根据τ_0的定义，它是等于b^2/r_2^2，所以

$$\frac{r_2}{b}=\frac{1}{\sqrt{0.205}}=2.21 \tag{7.178}$$

而

$$\frac{r_1}{b}=\frac{r_2}{b}e^{1/2}=2.21\times1.649=3.64 \tag{7.179}$$

现在让我们计算扩孔所作的功

$$W=\int_0^b 2\pi rh|\sigma_r|dr \qquad (h\,|\sigma_r|\text{ 指在孔边的值}) \tag{7.180}$$

利用了 $h/h_0=p_{\eta=0}=2.66$， $|\sigma_r|_{\eta=0}=\frac{\sigma_Y}{2}$，于是

$$W=\pi b^2 h_t\left(\frac{\sigma_Y}{2}\right)(2.66)=1.33\pi b^2 h_t\sigma_Y \tag{7.181}$$

这是一个重要的结论，在计算弹体的运动时，要采用这个结果。

图 7-12 为扩孔中的位移图，图 7-13 为扩孔中的应力分布图。

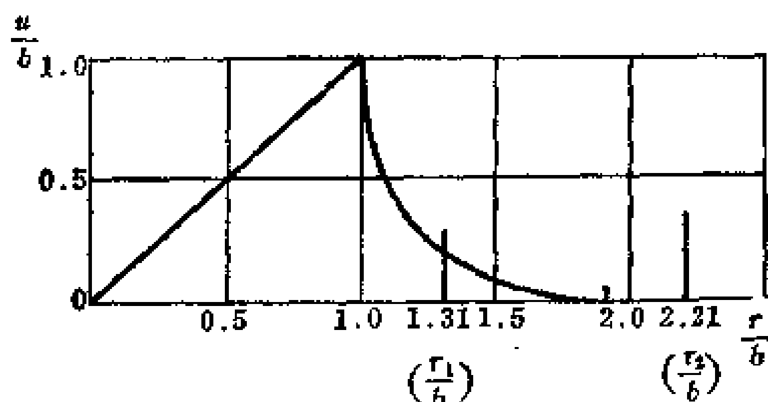


图7-12 扩孔中在大变形塑性区域的位移曲线

$\frac{r_2}{b}$—大变形和小变形塑性区的交界；$\frac{r_1}{b}$—大变形塑性区中 $\sigma_\theta<0$ 和 $\sigma_\theta>0$ 的交界；$0<\frac{r}{b}<1$—孔区。

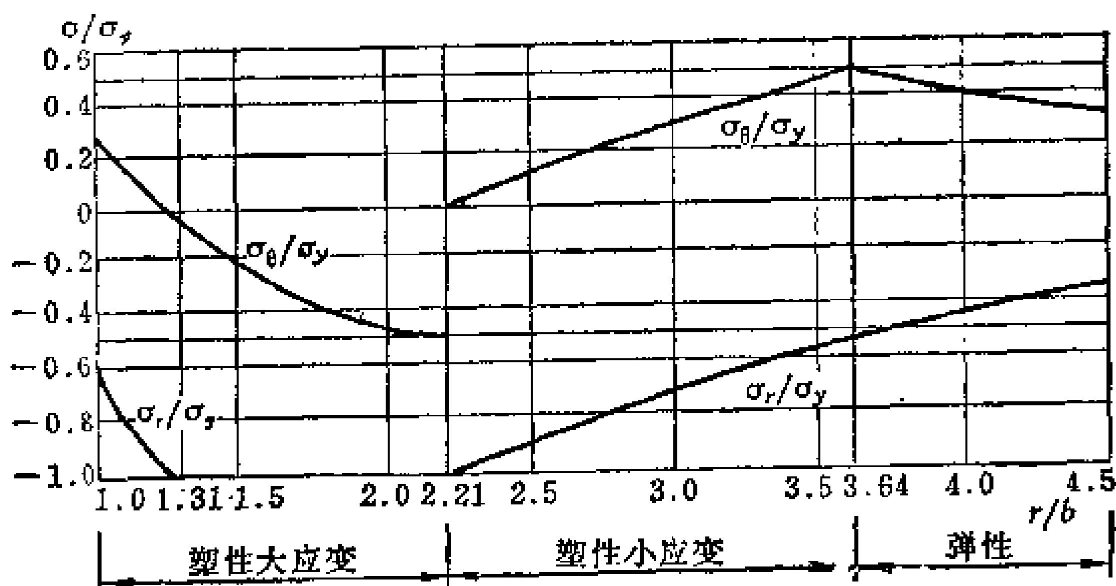


图7-13 扩孔中的各区域的应力

§7.5 尖头弹体对薄靶板的弗拉埃堡格塑性扩孔动力理论(1952)[7-18]

在泰勒理论以后，最重要的发展，是弗拉埃堡格的塑性动力理论。泰勒理论是准静力的。弗拉埃堡格也把靶板分为三部分（图 7-14)。最靠近弹孔的是动力塑性区（区域Ⅰ)，它的板厚变化很大，在平衡方程中考虑了惯性的影响。但是，由于数学上的原因，只能处理近似的等加速度问题，也即是说，弹孔扩展从零开始，以加速度进行。弗拉埃堡格在处理本区时，用了特征线法。其次，区域Ⅱ也是塑性区。在这个区域内，速度不高了，可以用准静力法处理。在这个区域内，厚度的变化很小，可以略去。在区域Ⅰ和Ⅱ之间，有一个冲击波前，在这个波前上，板的厚度和速度都可以是不连续的。最后，区域Ⅲ是静力弹性区。

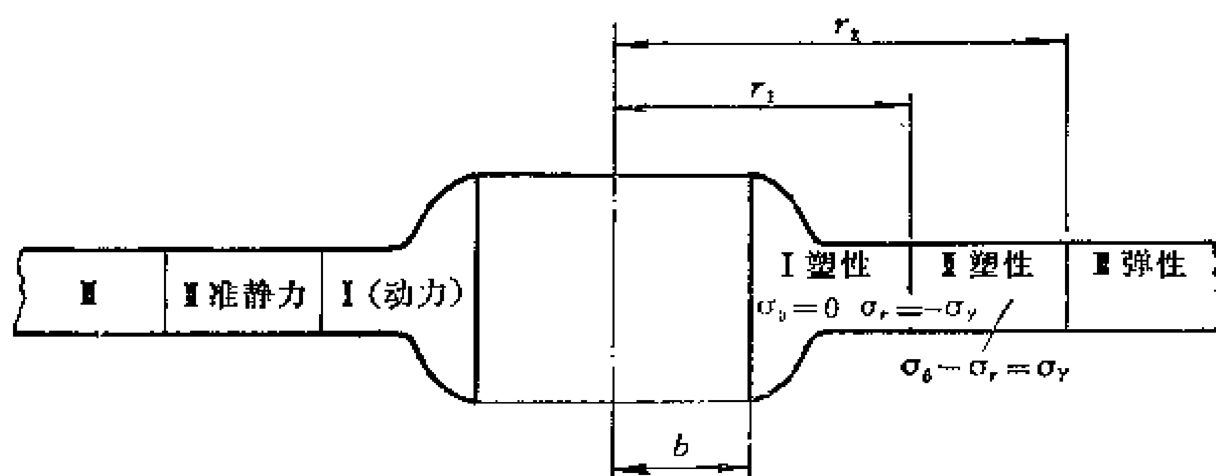


图7-14　弗拉埃堡格在靶板扩孔分析中划分的三个区域

（1）在弹性区（Ⅲ区）中($r_1 \leqslant r < \infty$) 其结果和泰勒相同，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r^2}\sigma_Y\\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r^2}\sigma_Y\\ \sigma_z &= 0\end{aligned}\right\} r_1 \leqslant r < \infty \tag{7.182}$$

（2）在塑性区（Ⅱ区）中($r_2\leqslant r\leqslant r_1$) 用摩尔屈服准则

$$\sigma_\theta-\sigma_r=\sigma_Y \tag{7.183}$$

和静力平衡条件

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \tag{7.184}$$

并且 $h=h_i=$常数，其解为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_Y\left(\ln\frac{r}{r_1}-\frac{1}{2}\right)\\ \sigma_\theta&=\sigma_Y\left(\ln\frac{r}{r_1}+\frac{1}{2}\right)\\ \sigma_z&=0\end{aligned}\right\}r_2\leqslant r\leqslant r_1 \tag{7.185}$$

在 $r=r_1$上，σ_r、σ_θ、σ_z 都是连续的。其中 r_1、r_2都是时间的待定函数。

在泰勒理论中，认为区域Ⅱ、Ⅰ的分界点 ξ_2 决定于 $\sigma_\theta=0$，从 (7.185)第二式，得

$$r_2=r_1e^{-1/2}=0.6065r_1 \tag{7.186}$$

只要 $r_2(t)$在区域Ⅰ的分析中求得，r_1也可以从 (7.186)求得。

（3）区域Ⅰ中运动方程的特征线形式　在区Ⅰ中，$h=h(r,t)$在考虑了惯性以后，可以写成

$$\frac{\partial}{\partial r}(h\sigma_r)+\frac{h}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)=\rho h\frac{Du}{Dt} \tag{7.187}$$

其中 ρ 为 ρ_i 的简写，它是常数（不可压缩性）

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r} \tag{7.188}$$

是欧拉导数，u 为径向速度。

因为$\sigma_\theta=0$，摩尔准则给出

$$\sigma_\theta-\sigma_r=-\sigma_r=\sigma_Y \tag{7.189}$$

于是 (7.187)式可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{c^2}{h}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{c^2}{r}=0 \tag{7.190}$$

其中 c 为塑性波的波速

$$c^2 = \frac{\sigma_Y}{\rho} \tag{7.191}$$

材料质量的连续方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rhu) = -\frac{\partial h}{\partial t} \tag{7.192a}$$

也可以写成

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial r} + h\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{hu}{r} = 0 \tag{7.192b}$$

(7.190)、(7.192 b) 为求解 $h(r, t)$、$u(r, t)$ 的两个微分方程。

现在让我们求 (7.190)、(7.192 b) 式的特征线，这些特征线是 (r, t) 平面中的曲线。在这些曲线上，$\frac{\partial u}{\partial t}$、$\frac{\partial u}{\partial r}$、$\frac{\partial h}{\partial t}$、$\frac{\partial h}{\partial r}$ 都不定或不是有限的。

为了研究 (7.190)、(7.192 b) 的特征线，设这些曲线的形式可以写成参数形式

$$r = r(\lambda), \quad t = t(\lambda) \tag{7.193}$$

其中 λ 为参数。于是

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\lambda} &= \frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dr}{d\lambda}\frac{\partial u}{\partial r}, \\
\frac{dh}{d\lambda} &= \frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dr}{d\lambda}\frac{\partial h}{\partial r}
\end{aligned} \tag{7.194}$$

把 (7.194)、(7.190)、(7.192 b)放在一起，求解

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\frac{c^2}{r}(dr)^2 + ududr + (c^2 - u^2)dudt + \frac{c^2}{h}drdh}{-[dr - (u + c)dt][dr - (u - c)dt]} \tag{7.195a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{dudr-ududt+\frac{c^2}{r}dtdr+\frac{c^2}{h}dhdt}{[dr-(u+c)dt][dr-(u-c)dt]} \tag{7.195b}$$

$$\frac{\partial h}{dt}=\frac{\frac{hu}{r}(dr)^2+hdudr+udhdr+(c^2-u^2)\frac{h}{r}dtdr+(c^2-u^2)dhdt}{-[dr-(u+c)dt][dr-(u-c)dt]} \tag{7.195c}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{dhdr-udhdt+\frac{hu}{r}dtdr+hdudt+(c^2-u^2)\frac{h}{r}(dt)^2}{[dr-(u+c)dt][dr-(u-c)dt]} \tag{7.195d}$$

满足$\frac{\partial u}{\partial t}$、$\frac{\partial u}{\partial r}$、$\frac{\partial h}{\partial t}$、$\frac{\partial h}{\partial r}$不定的条件，即特征线条件可以用（7.195a）为例求得。$\frac{\partial u}{\partial t}$不定时，要求（7.195a）的分子分母都同时为零。

$$dr-(u+c)dt=0 \tag{7.196a}$$

$$\frac{c^2}{r}(dr)^2+ududr+(c^2-u^2)\ dudt+\frac{c^2}{h}drdh=0 \tag{7.196b}$$

把$dr=(u+c)dt$代入（7.196b），

$$\frac{c}{h}dh+\frac{c}{r}dr+du=0 \tag{7.197}$$

积分得

$$u+c\ln(hr)=\text{const} \tag{7.198}$$

从其它三式的分子也得相同的结果。

（7.195a）的分母等于零中，还有一个可能，即

$$dr-(u-c)dt=0 \tag{7.199a}$$

$$\frac{c^2}{r}(dr)^2+udu\,dr+(c^2-u^2)du\,dt+\frac{c^2}{h}drdh=0$$

(7.199b)

把 $dr=(u-c)dt$ 代入 (7.199b)，即得

$$du-\frac{c}{r}dr-\frac{c}{h}dh=0 \qquad (7.200)$$

积分得

$$u-c\ln(hr)=\text{const} \qquad (7.201)$$

于是我们有两族特征线：

$$C_{+族}(\lambda=\beta=常数),\quad \frac{dr}{dt}=u+c,\quad 而\, u+c\ln(hr)$$

$$=2p(\beta) \qquad (7.202a)$$

$$C_{-族}(\lambda=\alpha=常数),\quad \frac{dr}{dt}=u-c,\quad 而\, u-c\ln(hr)$$

$$=-2q(\alpha) \qquad (7.202b)$$

在 $C_{+族}$ 特征线上，$\beta=$常数，所以 $p(\beta)$ 也是常数；在 $C_{-族}$ 特征线上，$\alpha=$常数，所以 $q(\alpha)$ 也是常数。在这两族特征曲线上，$\frac{\partial u}{\partial t}$、$\frac{\partial u}{\partial r}$、$\frac{\partial h}{\partial t}$、$\frac{\partial h}{\partial r}$ 不定，u、h 的解不存在。

（4）在 $r=r_2$ 处的跳跃条件　设在 $r=r_2$ 处有某一种波前，这个波前的运动速度为 U（图7.15）。区域Ⅰ这边 u、h、ρ 已知，压力为 $P=-h\sigma_r=-h\sigma_Y$。区域Ⅱ这边的 $u=0$，$h=h_t$，ρ 也已知，压力为 $P_0=-h_t\sigma_r=-h_t\sigma_Y$。

质量守恒定律

$$h(U-u)=h_tU \qquad (7.203a)$$

动量守恒定律

$$h\sigma_Y+\rho h(U-u)^2=h_t\sigma_Y+\rho h_tU^2 \qquad (7.203b)$$

这两个定律就足以决定跳跃的大小。令

$$\frac{u}{c}=\delta \qquad (7.204)$$

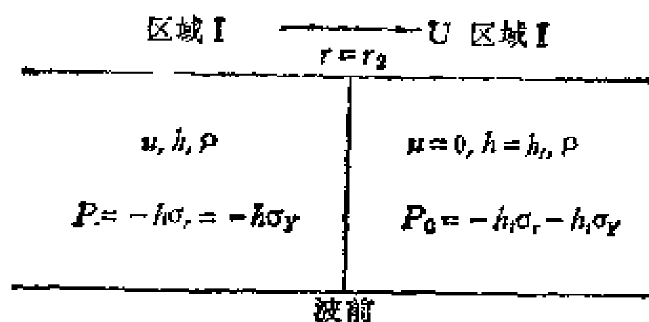


图7-15　$r=r_2$ 处波前的 u、h、ρ 及其跳跃

其中 $c^2=\frac{\sigma_Y}{\rho}$。从（7.203a、b）中消去 h/h_t 而且引进 $c^2=\frac{\sigma_Y}{\rho}$，化简后得

$$u=U-\frac{c^2}{U} \tag{7.205}$$

或用（7.204）式，得

$$\delta=\frac{U}{c}-\frac{c}{U} \tag{7.206}$$

解 $\frac{U}{c}$，得

$$\frac{U}{c}=\frac{1}{2}\delta+\sqrt{\frac{1}{4}\delta^2+1} \tag{7.207}$$

把它代入（7.203a），得

$$\frac{h}{h_t}=1+\frac{1}{2}\delta^2+\delta\sqrt{\frac{1}{4}\delta^2+1} \tag{7.208}$$

因为 δ 是小量，（7.207）、（7.208）可以展开为 δ 的级数，保留 δ^2，有近似表达式

$$\frac{U}{c}=1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^2 \tag{7.209a}$$

$$\frac{h}{h_t}=1+\delta+\frac{1}{2}\delta^2 \tag{7.209b}$$

只要 $\frac{u}{c}=\delta$ 已知，从（7.209a、b）就可以计算 $\frac{U}{c}$ 和 $\frac{h}{h_t}$。

（5）特征线简波解　简波解就是特征线族中形成一族直线的解。我们研究这族特征直线族解的初始和边界条件。

对于孔径扩展的问题，让我们限于研究孔径扩张的加速度f为一常量的问题。在初始时，孔径为零，而且初始速度也为零。孔周一点的运动方程为

$$r=\frac{1}{2}ft^2 \tag{7.210}$$

在（r，t）图上是一条抛物线$OPRD$（图7-16）。用无量纲量来表示时，孔周一点P的运动方程为

$$\frac{f}{c^2}r_P=\frac{1}{2}\left(\frac{f}{c}t_P\right)^2 \tag{7.211}$$

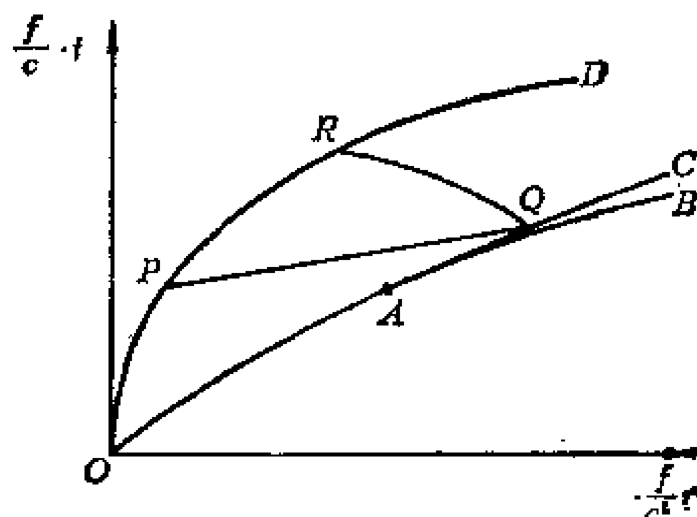


图7-16　（r，t）图上的等加速度运动、特征直线、包迹线和冲击波

我们将研究C_+特征线族（7.202a），它可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\left(\frac{f}{c^2}r\right)}{d\left(\frac{f}{c}t\right)}=\frac{u}{c}+1\\&\frac{u}{c}+\ln\left(\frac{f}{c^2}r\frac{h}{h_0}\right)=\text{const}\end{aligned}\right\} \tag{7.212}$$

如果这族特征线族是（r，t）图上直线族时（如图7-16通过P

点的直线PQ)，则我们一定要在每条直线上有

$$u = \text{常数}，\quad rh = \text{常数} \tag{7.213}$$

在（r，t）图中，代表等加速运动的抛物线上某点P的速度，应该是$u_P = \left(\frac{dr}{dt}\right)_P$。从（7.210），有

$$\frac{u_P}{c} = \frac{f}{c} t_P \tag{7.214}$$

如果我们用参数

$$\xi = t_P \tag{7.215}$$

来表示，则这些特征直线族中的每一特征直线就有不同的ξ。我们也可以用δ来表示这个参数，根据定义（7.204）

$$\delta = \frac{u_P}{c} = \frac{f}{c} t_P = \frac{f}{c} \xi \tag{7.216}$$

所以，每一特征线，就有不同的参数δ。

这族特征直线的斜度根据（7.212）式是$\frac{u_P}{c} + 1 = \delta + 1$，

它通过P点$\left(\frac{f}{c^2} r_P，\ \frac{f}{c} t_P\right)$，所以其直线方程为

$$\frac{f}{c^2} r = \frac{f}{c^2} r_P + \left(\frac{u_P}{c} + 1\right)\left(\frac{f}{c} t - \frac{f}{c} t_P\right) \tag{7.217}$$

根据（7.211），$\frac{f}{c^2} r_P = \frac{1}{2}\left(\frac{f}{c} t_P\right)^2 = \frac{1}{2}\delta^2$，$\frac{u_P}{c} = \frac{f}{c} t_P = \delta$，所以上式可以写成

$$\frac{f}{c^2} r = \frac{1}{2}\delta^2 + (1 + \delta)\left(\frac{f}{c} t - \delta\right) \tag{7.218}$$

这是不同参数δ的特征直线。图 7-17 为这族特征直线、孔径运动方程、特征直线、包迹线、冲击波以及弹塑分界线在（r，t）图中的相对位置。

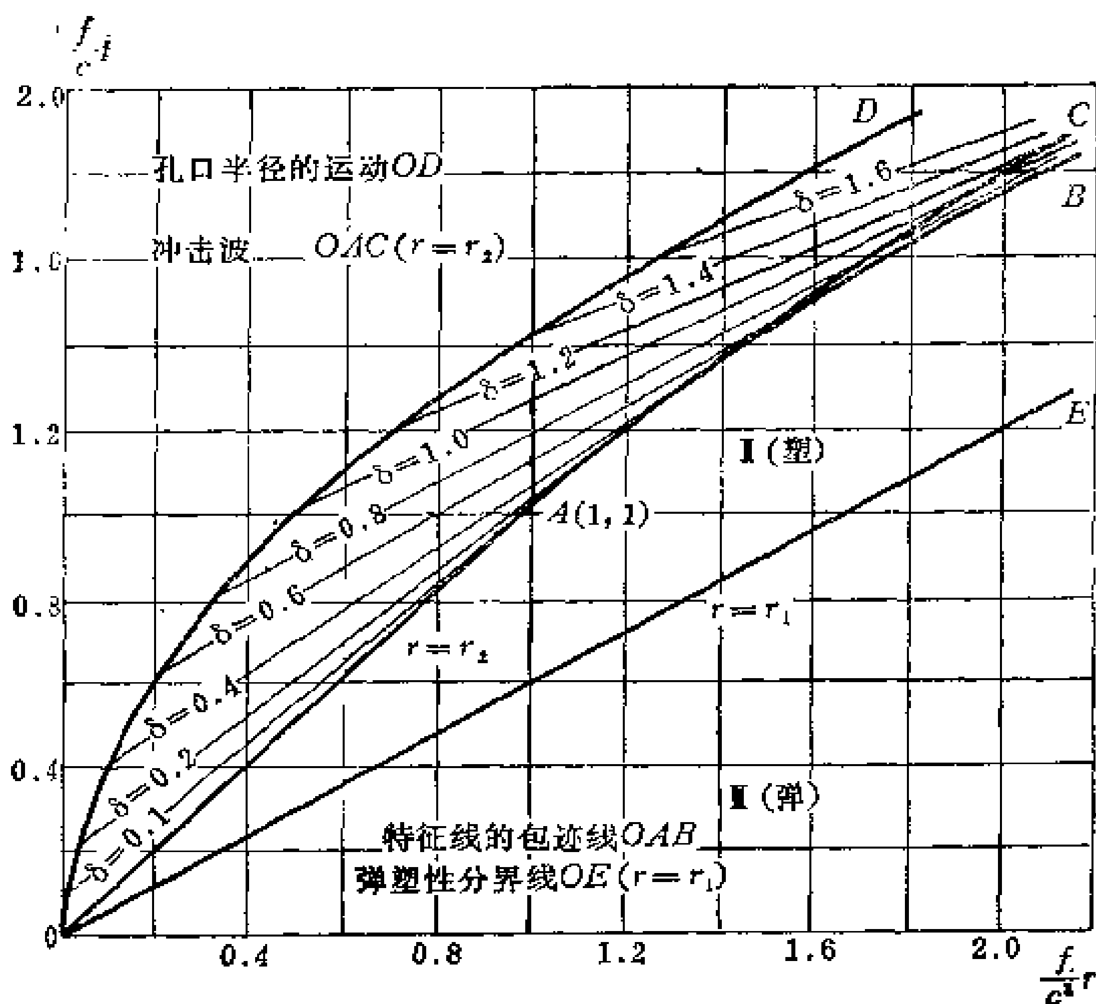


图7-17　孔径运动方程、特征直线族(简波)及其包迹线、冲击波和弹塑性分界面在(r, t)图中的相对位置

在气体动力学中，人们知道，在特征线组成展开线之前，气体流动形成冲击波。这里也有相同的性质。现在让我们先求特征线族（7.218）的包迹线。从微积分中，我们知道线族 $f(x, y, \alpha)=0$ 的包迹线为 $f^*(x, y, \alpha)=0$、$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha)=0$ 中消去α所得曲线，于是特征线族前包迹线的参数形式为

$$
f^*\left(\frac{f}{c^2}r,\ \frac{f}{c}t,\ \delta\right) = \frac{f}{c^2}r - \frac{1}{2}\delta^2 - (1+\delta)\left(\frac{f}{c}t - \delta\right) = 0
$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f^*}{\partial \delta} &= -\delta+(1+\delta)-\left(\frac{f}{c}t-\delta\right)\\ &=1+\delta-\frac{f}{c}t=0\end{aligned}\right\} \tag{7.219}$$

消去δ，得展开线 AB 的方程

$$\frac{f}{c^2}r=\frac{1}{2}\left(\frac{f}{c}t\right)^2+\frac{1}{2} \tag{7.220}$$

我们必须指出，这个包迹线方程是$-\infty\leqslant\delta\leqslant\infty$的整个直线族的包迹线。但在实际上，$\delta=\frac{u}{c}$不可能是负。所以实际的包迹线只有（7.220）式抛物线的一段，即 AB 段。A是由$\delta=0$的特征直线决定的。当$\delta=0$时，方程（7.218）变成

$$\frac{f}{c^2}r=\frac{f}{c}t \tag{7.221}$$

是 OA 线段（45°角斜线），把它和(7.220）联立求解，得交点A的坐标

$$\frac{f}{c^2}r_A=\frac{f}{c}t_A=1 \tag{7.222}$$

包迹线方程指出，它比孔口半径的位置前$\frac{1}{2}\frac{c^2}{f}$，这从图7-17上也能看得出来。

现在让我们研究冲击波的位置。冲击波在每条特征线上都有一个交点，在这交点上的$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}$即为冲击波的波速，从(7.209a)有

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}=\frac{U}{c}=1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^2 \tag{7.223}$$

这些δ是特定的。现在要决定冲击波上δ和 t 或 r 的关系，从而决定冲击波的 r 和 t 的关系。

特征线方程（7.218）可以写成

$$\frac{f}{c^2}r=1+(\delta+1)\left(\frac{f}{c}t-1\right)-\frac{1}{2}\delta^2 \tag{7.224}$$

对不同的δ而言，这个特征线就不同。求冲击波就是要求$\frac{1}{c}\ \frac{dr}{dt}$满足（7.223）关系的$r$（δ）和$t$（δ），把（7.224）式左边对δ的导数写成

$$\frac{d\left(\frac{f}{c^2}r\right)}{d\delta}=\frac{d\left(\frac{f}{c^2}r\right)}{d\left(\frac{f}{c}r\right)}\frac{d\left(\frac{f}{c}r\right)}{d\delta} \tag{7.225}$$

但$\frac{d\left(\frac{f}{c^2}r\right)}{d\left(\frac{f}{c}t\right)}=\frac{1}{c}\ \frac{dr}{dt}=\frac{u}{c}=1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^2$。所以上式可以写成

$$\frac{d\left(\frac{f}{c^2}r\right)}{d\delta}=\left(1+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^2\right)\frac{d\left(\frac{f}{c}t\right)}{d\delta} \tag{7.226}$$

由于r（δ）和t（δ）中δ又满足（7.224）式，所以有

$$\frac{d\left(\frac{f}{c^2}r\right)}{d\delta}=-\delta+\left(\frac{f}{c}t-1\right)+(\delta+1)\frac{d\left(\frac{f}{c}t\right)}{d\delta} \tag{7.227}$$

从（7.225）、（7.227）中消去$\frac{d\left(\frac{f}{c^2}r\right)}{d\delta}$得

$$\frac{1}{8}\delta(\delta-4)\frac{d\left(\frac{f}{c}t\right)}{d\delta}=-\delta+\left(\frac{f}{c}t-1\right) \tag{7.228}$$

令

$$\frac{f}{c}t-1=\frac{f}{c}t^* \tag{7.229}$$

(7.228) 可以写成$\left(\frac{f}{c}t^*\right)$的微分方程，

$$\frac{d\left(\frac{f}{c}t^*\right)}{d\delta}+\frac{8}{\delta(4-\delta)}\left(\frac{f}{c}t^*\right)=\frac{8}{4-\delta} \tag{7.230}$$

其起始条件是冲击波的（r， t）图位置通过A点，即

$$\delta=0,\ \frac{f}{c}t_A=1,\ \frac{f}{c^2}r_A=1 \tag{7.231}$$

(7.230) 在起始条件 (7.231) 下的积分为

$$\begin{aligned}\frac{f}{c}t^*&=\frac{f}{c}t-1\\&=4\left\{3-\frac{8}{\delta}-2\frac{(4-\delta)^2}{\delta^2}\ln\left(1-\frac{1}{4}\delta\right)\right\}\\&=\frac{2}{3}\delta+\frac{1}{24}\delta^2+\cdots\end{aligned} \tag{7.232}$$

倒过来可以写成

$$\delta=\frac{3}{2}\left(\frac{f}{c}t-1\right)-\frac{9}{24}\left(\frac{f}{c}t-1\right)^2+\cdots \tag{7.233}$$

把它代入 (7.224)，得

$$\begin{aligned}\frac{f}{c^2}r&=1+\left(\frac{f}{c}t-1\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{f}{c}t-1\right)^2\\&\quad-\frac{45}{128}\left(\frac{f}{c}t-1\right)^3+\cdots\end{aligned} \tag{7.234}$$

这就是冲击波波面AC（图7-16）的方程式。(7.233) 式表示 在不同时间的波面内的位移速度$\frac{u}{c}$的跳跃。

在冲击波前后的厚度比为

$$\begin{aligned}\frac{h_s}{h_e}&=\frac{h}{h_e}=1+\delta+\frac{1}{2}\delta^2+\cdots\\&=1+\frac{3}{2}\left(\frac{f}{c}t-1\right)+\frac{63}{64}\left(\frac{f}{c}t-1\right)^2+\cdots\end{aligned} \tag{7.235}$$

现在让我们研究在孔周上的厚度 h_P 和原厚度的比例。

就沿着同一特征线而言，rh=常数（见7.213）。设孔周上厚度为 h_P，同一特征线上的冲击波前厚度为 h_s，孔周半径为 r_P，冲击波前半径为 r_s，所以有

$$r_P h_P = r_s h_s, \quad \frac{h_P}{h_s} = \frac{r_s}{r_P} \tag{7.236}$$

或根据（7.209b）

$$\frac{h_P}{h_t} = \frac{h_P}{h_s} \frac{h_s}{h_t} = \frac{r_s}{r_P}\left(1 + \delta + \frac{1}{2}\delta^2\right) \tag{7.237}$$

在 $OPRD$ 上，P 点的坐标 $\frac{f}{c} t_P$ 和 $\frac{f}{c^2} r_P$，它们满足特征线方程（7.218）和运动方程（7.211），即

$$\left.\begin{aligned} \frac{f}{c^2} r_P &= (1+\delta)\frac{f}{c} t_P - \delta - \frac{1}{2}\delta^2 \\ \frac{f}{c^2} r_P &= \frac{1}{2}\left(\frac{f}{c} t_P\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.238}$$

解之，取二次式解中的负号，得

$$\frac{f}{c} t_P = \delta, \quad \frac{f}{c^2} r_P = \frac{1}{2}\delta^2 \tag{7.239}$$

把（7.232）式代入（7.224）式，得

$$\frac{f}{c^2} r_s = 1 + \frac{2}{3}\delta + \frac{5}{24}\delta^2 \tag{7.240}$$

于是（7.237）式可以写成

$$\begin{aligned} \frac{h_P}{h_t} &= \frac{2}{\delta^2}\left(1 + \delta + \frac{1}{2}\delta^2\right)\left(1 + \frac{2}{3}\delta + \frac{5}{24}\delta^2\right) \\ &\approx \frac{2}{\delta^2}\left(1 + \frac{5}{3}\delta + \frac{11}{8}\delta^2\right) \end{aligned} \tag{7.241}$$

或者

$$\frac{h_p}{h_t}=\frac{2}{\left(\frac{f}{c}t_p\right)^2}\left\{1+\left(\frac{f}{c}t_p\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{f}{c}t_p\right)^2\right\}$$

$$\times\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{f}{c}t_p\right)+\frac{5}{24}\left(\frac{f}{c}t_p\right)^2\right\} \quad (7.241a)$$

(7.235) 和 (7.241a) 分别见图 7-18 和图 7-19。较大的 $\frac{f}{c}t_p$ 用 (7.233) 和 (7.235) 联立计算。

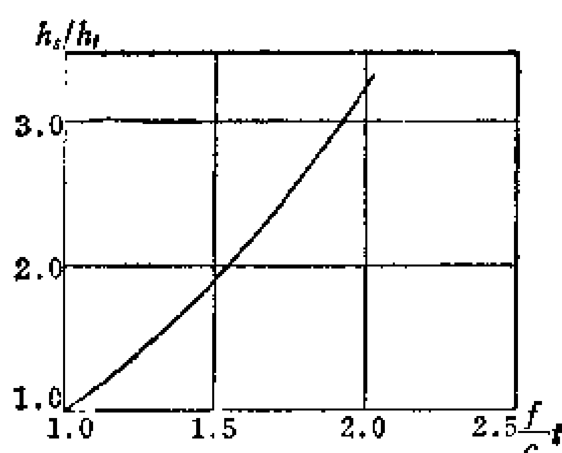


图7-18 冲击波上的厚度比

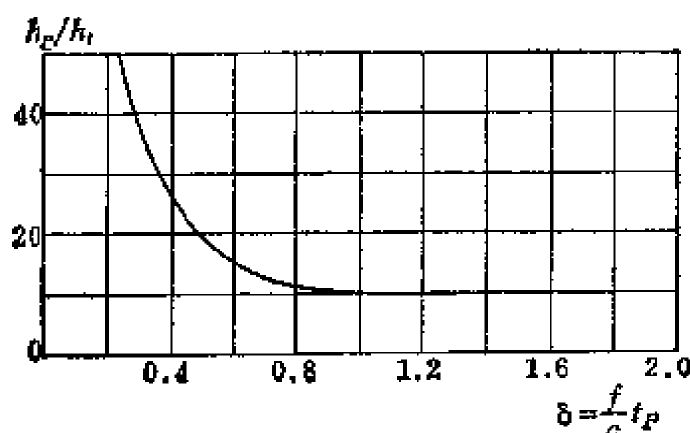


图7-19 孔周的厚度比

（6）等速扩孔紧接着等加速扩孔 为了提供初始条件，我们先假设不是从静止时（初始速度为零）开始作等加速度扩孔，而是先有一段等速运动的扩孔，然后接着是等加速度扩孔。等速

运动的扩孔完全是为了提供特征线解的初始条件而设置的。有了这个初始条件，人们就能在某一特征线上确定 u 和 h，这族特征线当然无须一定是条直线。只要在孔周上的 u 已知，其它地方的 u 和 h 也就决定了。

泰勒曾指出，区域 I 中的运动方程 (7.190)、(7.192b) 有一种解，在这种解中，u 和 h 只是 $\frac{r}{ct}$ 的函数，而不是单独的 r 和 t 的函数。现在让我们在这个假定上求解。

设 $u(r,t)$、$h(r,t)$ 是 $\frac{r}{ct}=\xi$ 的函数

$$u(r,t)=u(\xi),\quad h(r,t)=h(\xi) \tag{7.242}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{ct}\frac{du}{d\xi},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{r}{ct^2}\frac{du}{d\xi}\\ \frac{\partial h}{\partial r}=\frac{1}{ct}\frac{dh}{d\xi},\quad \frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{r}{ct^2}\frac{dh}{d\xi}\end{aligned}\right\} \tag{7.243}$$

把它们代入 (7.190)、(7.192b)，得

$$\left.\begin{aligned}\left(-\xi+\frac{u}{c}\right)\frac{du}{d\xi}+\frac{c}{h}\frac{dh}{d\xi}=-\frac{c}{\xi}\\ \left(-\xi+\frac{u}{c}\right)\frac{dh}{d\xi}+\frac{h}{c}\frac{du}{d\xi}=-\frac{hu}{c\xi}\end{aligned}\right\} \tag{7.244}$$

消去 $\frac{dh}{d\xi}$，得

$$c\frac{du}{d\xi}=\frac{1}{\left[\xi-\left(\frac{u}{c}+1\right)\right]\left[\xi-\left(\frac{u}{c}-1\right)\right]} \tag{7.245}$$

如果

$$\frac{r}{ct}=\xi=\frac{u}{c}\pm 1 \tag{7.246}$$

时，$\frac{du}{d\xi}\to\infty$，所以，它应该是一种解的极限条件，其实它就是

正特征线和负特征线的包迹线。在这些包线上，解不存在。

设我们在这些包线以外的区域内求解，即

$$\frac{r}{ct}=\xi\neq\left(\frac{u}{c}\pm 1\right) \tag{7.247}$$

则（7.245）给出

$$\frac{d\left(\frac{u}{c}\right)}{d\xi}=\frac{1}{\left(\frac{u}{c}-\xi\right)^2-1} \tag{7.248}$$

令

$$\frac{u}{c}-\xi=y \tag{7.249}$$

把（7.249）代入（7.248），整理后，得

$$d\xi=\left(-1+\frac{1}{2-y^2}\right)dy \tag{7.250}$$

积分后给出

$$\xi=-y+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-y}+\text{const}K \tag{7.251a}$$

或可写成

$$\frac{u}{c}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-y}+\text{const}K \tag{7.251b}$$

积分常数用孔周条件决定，设孔周等速运动的速度为已知，用 v 表示，而且在周边上，等速运动条件给出 $r=vt$，于是在孔周上，

$$y=\frac{u}{c}-\frac{r}{ct}=\frac{v}{c}-\frac{v}{c}=0 \tag{7.252}$$

把 $y=0$， $u=v$ 写入（7.251b），得

$$\frac{v}{c}=\text{const}K \tag{7.253}$$

于是（7.251b）可以写成

$$\frac{u}{c}-\frac{v}{c}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-y} \tag{7.254}$$

或可写成

$$\frac{r}{ct}=\xi=\frac{u}{c}-\sqrt{2}\tanh\left[\sqrt{2}\left(\frac{u}{c}-\frac{v}{c}\right)\right] \tag{7.255}$$

同样，从$\frac{dh}{d\xi}$的表达式中，我们积分得

$$\frac{h}{h_t}=\frac{ct}{r}\frac{2\sinh\left(\sqrt{2}\frac{v}{c}\right)}{\frac{v}{c}\cosh\left[\sqrt{2}\left(\frac{v}{c}-\frac{u}{c}\right)\right]} \tag{7.256}$$

(7.255)、(7.256) 为本题的解。只要$\frac{v}{c}$已给，(7.255)为$\frac{u}{c}$和$\frac{r}{ct}=\xi$的关系，(7.256) 是$\frac{h}{h_t}$和ξ的关系。

现在让我们先求正特征线的包迹线上的$\frac{u}{c}$值$\left(\frac{v}{c}\text{为已知}\right)$。

正特征包迹线是$\left(\frac{ct}{r}\right)_c=\frac{u}{c}+1$，把它代入(7.255)，有

$$1=-\sqrt{2}\tanh\left[\sqrt{2}\left(\frac{u}{c}-\frac{v}{c}\right)\right] \tag{7.257}$$

或

$$\left(\frac{u}{c}\right)_c=\frac{v}{c}-0.623\ (\text{在特征线包迹线上}) \tag{7.258}$$

所以，正特征线的包迹线的$\frac{r}{ct}$为

$$\left(\frac{r}{ct}\right)_c=\frac{u}{c}+1=\frac{v}{c}+0.377 \tag{7.258a}$$

还有从 (7.255) 式，计算$u=0$时的$\left(\frac{r}{ct}\right)_0$，把 $u=0$ 代入

(7.255)，得

$$\left(\frac{r}{ct}\right)_0=\xi_0=+\sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2}\frac{v}{c}\right) \qquad (7.259)$$

还有，称周边点的$\left(\frac{r}{ct}\right)$为$\left(\frac{r}{ct}\right)_p$，根据定义（等速运动）

$$\left(\frac{r}{ct}\right)_p=\frac{v}{c} \qquad (7.260)$$

现在让我们计算在各种$\frac{v}{c}$值的$\left(\frac{r}{ct}\right)_p$、$\left(\frac{r}{ct}\right)_0$、$\left(\frac{r}{ct}\right)_c$曲线（图7-20），图中$\xi=\frac{r}{ct}$为包迹线和质点速度为零的行波的速度，以及孔周运动的速度。包迹线的传播速度比孔周运动速度大0.377，包迹线上质点运动速度$\left(\frac{u}{c}\right)_c$为孔周运动速度$\left(\frac{v}{c}\right)$

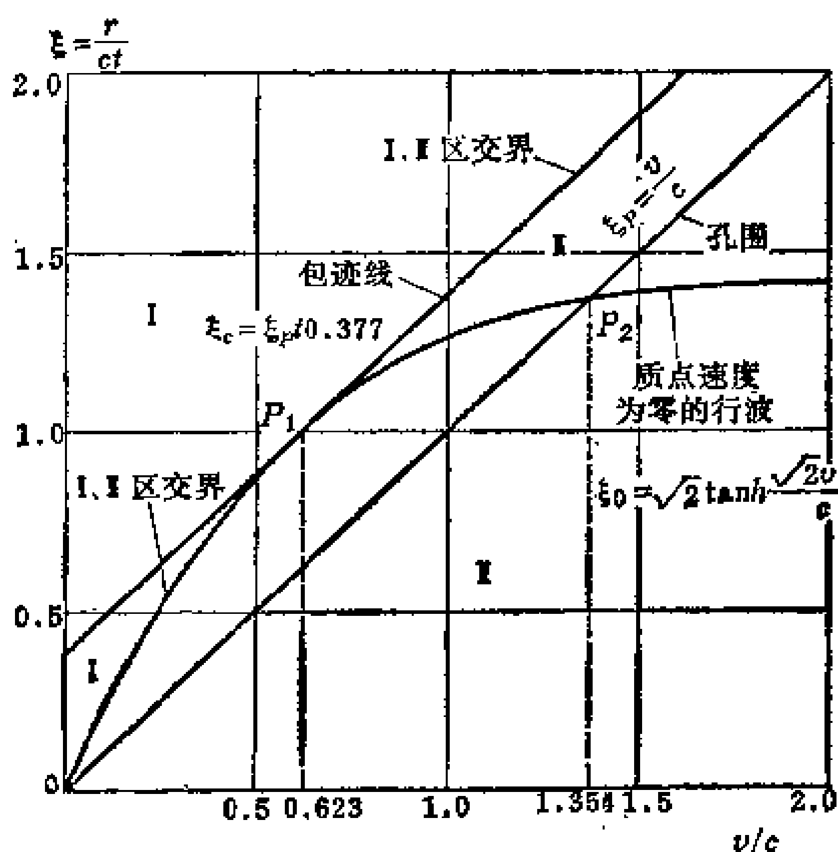


图7-20　在不同孔周速度下，质点波速为零的行波和包迹线的传播速度的相对关系

减去0.623。从图 7-20 中看到这里有四种情况：（1）在 $0 \leqslant \frac{v}{c} < 0.623$ 的区域内，包迹线传播速度最高，零速度线次之，孔周最慢，但对于质点运动速度而言，孔周最快（是正的），零速度线为零，包迹线的质点运动速度是负的，从塑性区 I 到塑性区 II 的跳跃条件看，塑性区 I 的一面的质点速度只能是正的，不能是负的，亦即是说 $\delta = \frac{u}{c} > 0$。只要对每一孔周速度 $\frac{v}{c}$ 给出后，能够从冲击波的条件（7.209a）决定 $\delta = \frac{u}{c}$，只要从（7.255）就能决定冲击波的 $\frac{r}{ct}$ 值了。决定冲击波 $\frac{r}{ct} = \frac{U}{c}$ 的条件为（7.209a）和（7.255），用 $\delta = \frac{u}{c}$，$\frac{r}{ct} = \frac{U}{c}$ 来写，是

$$\left.\begin{aligned} \frac{U}{c} &= 1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{8}\delta^2 \\ \frac{U}{c} &= \delta - \sqrt{2}\ \tanh\left[\sqrt{2}\left(\delta - \frac{v}{c}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{7.261}$$

这是求解 $\frac{U}{c}$、δ 的两个方程，其结果是两个用 $\frac{v}{c}$ 为参数的 $\frac{U}{c} = \frac{r}{ct}$、$\delta = \frac{u}{c}$ 的表达式。从此还能决定 r_2，

$$\frac{\frac{U}{c}}{\frac{v}{c}} = \frac{r_2}{b} \tag{7.262}$$

（2）$\frac{v}{c} = 0.623$，这时包迹线和零速度重合。同种，我们可以决定冲击波的位置和 $\frac{U}{c} = \frac{r}{ct}$、$\delta = \frac{u}{c}$ 的表达式(用7.261)。

（3）$0.623 < \frac{v}{c} < 1.354$，在这区域内，包迹线传播速度最高，零速度次之，孔周最慢。但质点速度和前面的区域不同，在这个区域内，包迹线上的质点速度也是正的，所以冲击波在包迹线和零速度线之间，而不在零速度线和孔周之间。决定其 δ、$\frac{U}{c}$ 的条件和（7.261）相同。（4）$1.354 \leqslant \frac{v}{c} < \infty$，在这个区域内，还是包迹线的传播速度最高，但孔周速度次之，零速度线落后于孔周。实际上，从孔周到包迹线之间，质点速度是单调上升的。因此，冲击波一定在包迹线之后，其位置也由（7.261）决定。

这里的讨论纠正了泰勒[7-17]和弗拉埃堡格[7-18]的一种误解。他们认为 $\frac{v}{c} = 0.623$ 是一种临界条件，在 $\frac{v}{c} > 0.623$ 以后，包迹线的传播速度将小于零速度线的传播速度，所以没有零速度线的行波了。这种解释已不能成立，这里的讨论证明显然不是这样的。

上面所说的几种情况，也可以在 (ct, r) 图中表示如图7.21。从图上可以看到在几种情况下的各种行波的相对位置。

现在让我们在等速扩展之后，紧接着就进行等加速度扩展。设等速孔周运动的速度为 $\frac{v}{c} = 0.2$，从时间 $t = 0.2\frac{c}{f}$ 起 $\left(\text{即 } \frac{f}{c} t = 0.2 \text{ 起}\right)$ 继续以等加速度 f 扩展。按图7-22，OA 是开始时的等速运动，OB 是质点速度为零的行波（也是等速运动），AB 是正特征线，它是从 A 点出发的，不一定是直线。AC 是孔周的新的等加速运动，是通过 A 点的抛物线的一部分。

我们将用数值积分法顺着正负特征线，计算 t，r，u，h 各点的值。

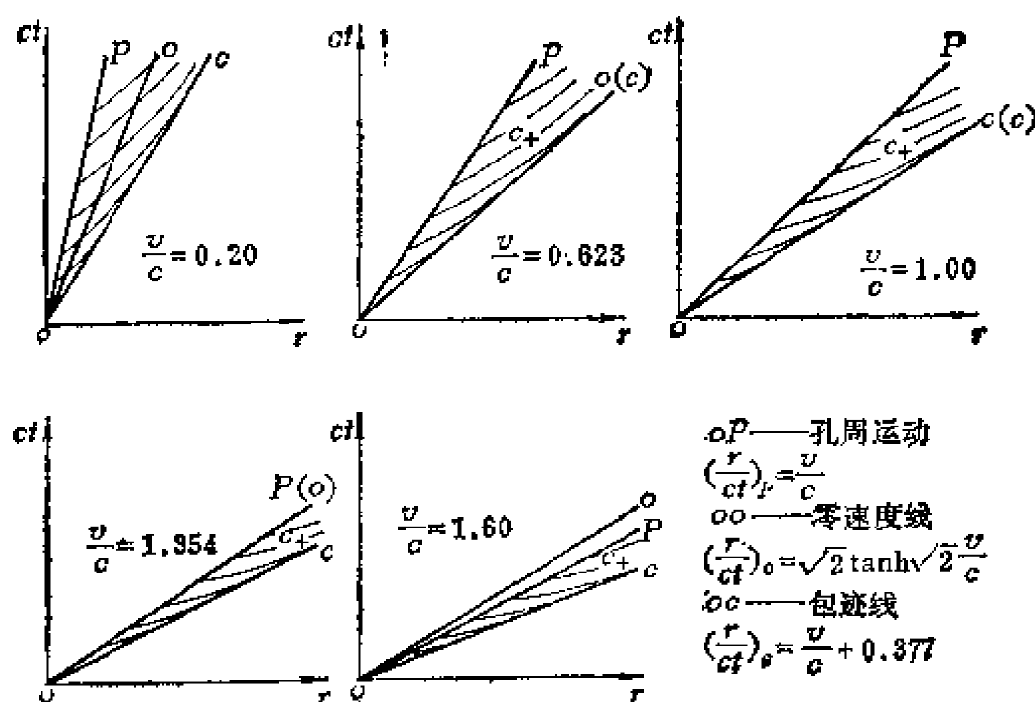


图7-21　各$\frac{v}{c}$区域的孔周运动、零速度线、包迹线的行波速度

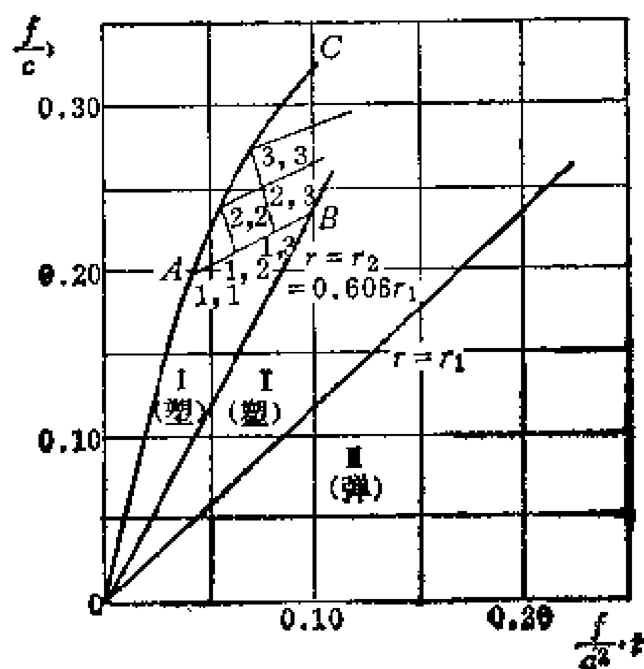


图7-22　在等加速运动时，在第Ⅰ区内的积分网格

在正特征曲线 (C_f) AB $\left(\text{通过}\frac{f}{c}t=0.2\text{的}A\text{点}\right)$ 上，按时间等分为 $\frac{f}{c}t_{1,1}$，$\frac{f}{c}t_{1,2}$，$\frac{f}{c}t_{1,3}$，……在（1，1）上，我们有 $r_{1,1}$，$t_{1,1}$，$u_{1,1}$ 和 $h_{1,1}$。这是已知的等速度孔周运动的解（7.255）、（7.256）。

在 (1,1)～(1,2) 线段上，我们已知

（1）等速运动解（7.255）、（7.256）

（2）正特征线方程（7.202a）

我们可以决定（1,2）上的 r、t、u、h 值，其实可以决定整条特征线 AB 上各点的 r、t、u、h 值。

设（1,2）点的各变量都已算得，让我们顺着（1,2)～(2,2）的负特征线研究（2,2）上的各变量的值。在（1,2)～(2,2)上用有限差分，u 用平均值，则下列方程

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}=\frac{u}{c}-1,\quad \frac{u}{c}-\ln\left(\frac{f}{c^2}r\frac{h}{h_t}\right)=\text{const} \tag{7.263}$$

写成下列形式

$$\frac{\frac{f}{c^2}(r_{2,2}-r_{1,2})}{\frac{f}{c}(t_{2,2}-t_{1,2})}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{2,2}}{c}+\frac{u_{1,2}}{c}\right)-1 \tag{7.264a}$$

$$\frac{u_{2,2}}{c}-\ln\left(\frac{f}{c^2}r_{2,2}\frac{h_{2,2}}{h_t}\right)=\frac{u_{1,2}}{c}-\ln\left(\frac{f}{c^2}r_{1,2}\frac{h_{1,2}}{h_t}\right) \tag{7.264b}$$

因为

$$\frac{f}{c^2}r_{2,2}-0.02=\frac{1}{2}\left(\frac{f}{c}t_{2,2}\right)^2,\quad \frac{u_{2,2}}{c}=\frac{f}{c}t_{2,2} \tag{7.265}$$

把（7.265）代入（7.264a、b），消去了 $r_{2,2}$，$u_{2,2}$ 以后，就得求解 $h_{2,2}$、$t_{2,2}$ 的两个方程。

我们假定象前面那样解出了（1,1)、(1.2)、(2,2)上的 t、r、u、h 的值，我们也可以象求（1,2）点的值那样求（1,3）点的值。现在我们就可以求（2,3）点的 t、r、u、h 值。这里要四个方程：

顺着（2,2)～(2,3)，是通过（2,2）的正特征线，我们有

$$\frac{\frac{f}{c^2}(r_{2,3}-r_{2,2})}{\frac{f}{c}(t_{2,3}-t_{2,3})}=-\frac{1}{2}\left(\frac{u_{2,3}}{c}+\frac{u_{2,2}}{c}\right)-1 \tag{7.266a}$$

$$\frac{u_{2,3}}{c}+\ln\left(\frac{f}{c^2}\,r_{2,3}\,\frac{h_{2,3}}{h_t}\right)=\frac{u_{2,2}}{c}+\ln\left(\frac{f}{c^2}\,r_{2,2}\,\frac{h_{2,2}}{h_t}\right) \tag{7.266b}$$

顺着（1,3)～(2,3)，用通过（1,3）的负特征线方程：

$$\frac{\frac{f}{c^2}(r_{2,3}-r_{1,3})}{\frac{f}{c}(t_{2,3}-t_{1,3})}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{2,3}}{c}+\frac{u_{1,3}}{c}\right)-1 \tag{7.267a}$$

$$\frac{u_{2,3}}{c}-\ln\left(\frac{f}{c^2}\,r_{2,3}\,\frac{h_{2,3}}{h_t}\right)=\frac{u_{1,3}}{c}-\ln\left(\frac{f}{c^2}\,r_{1,3}\,\frac{h_{1,3}}{h_t}\right) \tag{7.267b}$$

这是决定四个待定量 $t_{2,3}$、$r_{2,3}$、$u_{2,3}$、$h_{2,3}$ 的四个方程。这样还可以进一步计算（3,3）点上的值。

这样的计算是很易进行下去的。

从上面的计算说明了怎样利用等速运动来提供等加速运动的初始条件，也说明了怎样用有限差分法顺着正负特征线来计算变形场。

§7.6 在泰勒扩孔弹塑性理论基础上的弹体运动理论

在泰勒理论中给出了扩孔到半径为 r 时的塑性功 $W(r)$(见 7.181)

$$W(r)=1.33\pi r^2 h_t \sigma_Y \tag{7.268}$$

设有一个尖头弹体，其弹头曲线为

$$r=r(x) \tag{7.269}$$

为从弹头尖顶算起的坐标（图7-23），以锥形和卵形弹头为例（图7-23），它们是

$$\left.\begin{array}{ll} r=\left(\dfrac{R_P}{L_N}\right)x=x\tan\beta \ \text{（锥形弹头）} & 0\leqslant x\leqslant L_N \\ r=R_P\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi\dfrac{x}{L_N}\right) \ \text{（卵形弹头）} & 0\leqslant x\leqslant L_N \end{array}\right\} \tag{7.270}$$

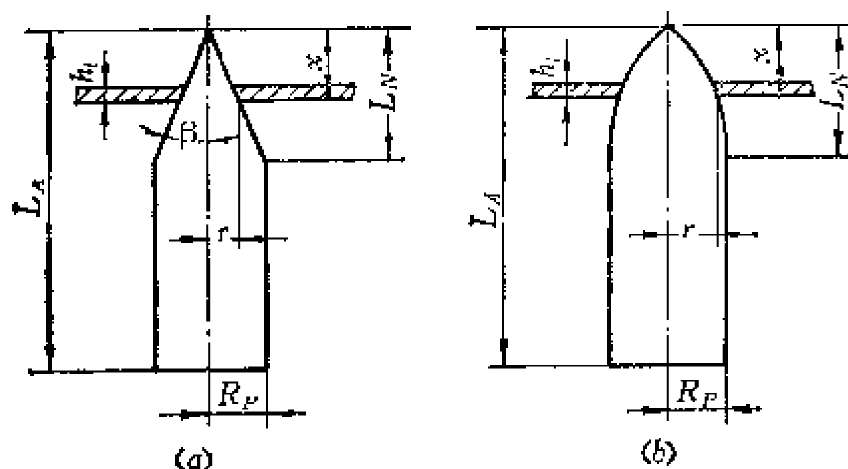


图7-23　两种弹头

（a）锥形弹头；（b）卵形弹头。

现在可以简单地用能量守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+W \tag{7.271}$$

其中 m 为弹体质量，v 为 $\dfrac{dx}{dt}$；v_0 为撞击速度。于是以锥形弹头为例：

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}mv_0^2-1.33\pi(h_t\sigma_Y)x^2\frac{R_P^2}{L_N^2} \tag{7.272}$$

取

$$\lambda=\sqrt{2.66\pi h_t\sigma_Y}\ \frac{1}{v_0}\ \frac{R_P}{L_N^2} \tag{7.273}$$

上式可以写成

$$\frac{dx}{v_0\sqrt{1-\lambda^2x^2}}=dt \tag{7.274}$$

积分得

$$t_N=\int_0^{L_N}\frac{dx}{v_0\sqrt{1-\lambda^2x^2}}=\frac{1}{v_0\lambda}\sin^{-1}\lambda L_N \tag{7.275}$$

这是弹头穿过靶板所耗时间。

设弹头全部穿过靶板时的运动速度 v 为零，则弹体在行进 $x=L_N$ 时，刚好耗尽动能，这时的撞击速度称为弹道极限速度 v_{50}，所以在（7.272）中，同时代入 $v=0$，$v_0=v_{50}$，$x=L_N$ 时，得

$$v_{50}=\sqrt{\frac{2.66\pi}{m}(h_t\sigma_Y R_P^2)} \tag{7.276}$$

同样，对卵形弹头而言，其结果也相同。

§7.7 扩孔的孔口对称性问题

泰勒在实验后指出[7-17]，在扩孔过程中，孔口形状有两种可能，一种是厚度变化对称于板的中面，一种是厚度变化偏于中面的一边。其实，第二种情况还可以分成两种，一种是靶板没有弯曲，一种是靶板的孔口附近稍有弯曲（图7-24)。这三种变形情况是由弹体半径 R_P 和板厚 h_t 之比 R_P/h_t 所决定的。大体上，$\frac{R_P}{h_t}\leqslant 3$ 时，产生对称变形；$3\leqslant\frac{R_P}{h_t}\leqslant 8$ 时，产生靶板不弯曲的偏于一边的变形；$8\leqslant\frac{R_P}{h_t}$ 时，靶孔附近有弯曲并偏于一边的变形。对于后者而言，是经常在弹道极限速度中观察到的。这时，材料变为偏于靶板一侧的管形弹丸；在这种变形中，法向应力 $\sigma_z=0$，径向应力 $\sigma_r=0$，弹孔是在环向应力 $\sigma_\theta=\sigma_{YT}$ 单独作用下形成的。

在下面我们将讨论（b）、（c）这两种弹孔的问题。

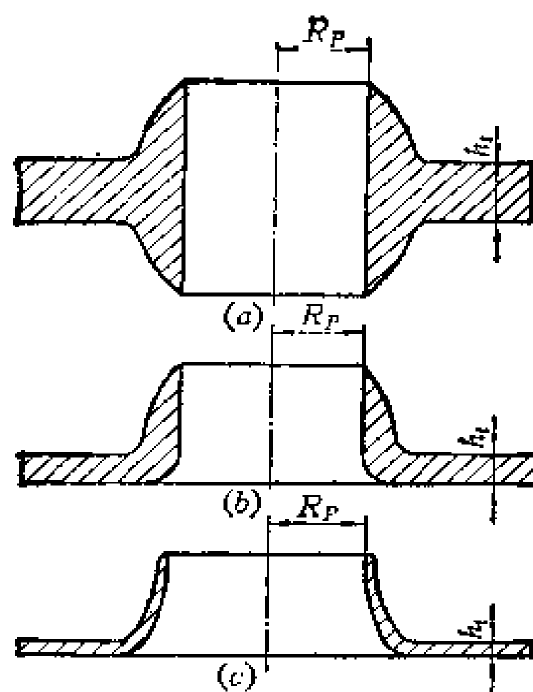


图7-24 三种形式的靶板弹孔

(a) 对称型扩孔，$0 \leqslant \frac{R_P}{h_t} \leqslant 3$；(b) 偏侧一方的扩孔，$3 \leqslant \frac{R_P}{h_t} \leqslant 8$；(c) 偏侧一方并有弯曲的筒形弹孔，$8 \leqslant \frac{R_P}{h_t}$。

§7.8 筒形弹孔的汤姆逊理论(1955)

对于较薄的靶体而言，弹孔一般呈筒形，材料在扩孔时不是象泰勒理论一样，向四边挤压，造成厚度的变化，而是跟着筒形翻转变形，翻转上去成为筒壁的一段，即靶板的一环翻转为筒壁的一节（图7-25），或即A转为B。

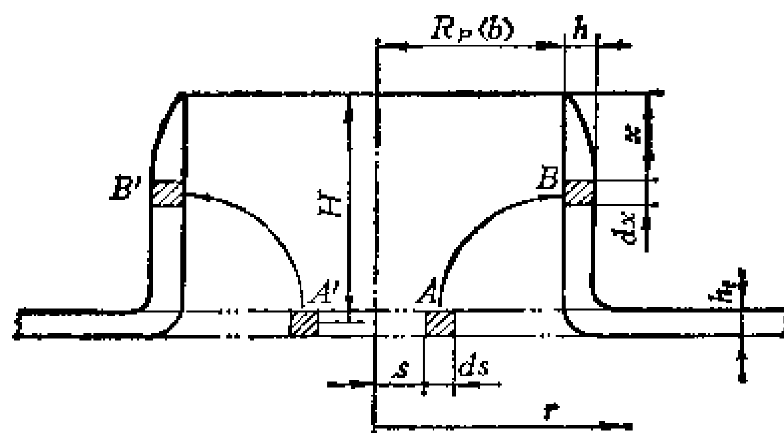


图7-25 筒形弹孔的翻转变形

在研究这个问题时，汤姆逊提出了三个假设[7-20,7-21]

（1）$\sigma_r=\sigma_z=0$，$\sigma_\theta=\sigma_Y$ 是主要应力；

（2）全部筒形弹孔壁都是屈服的；

（3）变形时，容积不变，即不可压缩。

单轴应力问题的应变为

$$\epsilon_r=\epsilon_z=\epsilon,\quad \epsilon_\theta+2\epsilon=0 \tag{7.277a}$$

原离轴 S 处的元素 $2\pi sh_t ds$ 变为 $2\pi R_p h dx$，从体积不变可得

$$2\pi h_t s ds=2\pi h R_p dx \tag{7.277b}$$

但是，根据（7.277），有

$$\left.\begin{aligned} h&=h_t(1-\epsilon)\\ dx&=ds(1-\epsilon)\end{aligned}\right\} \tag{7.277c}$$

于是得

$$\frac{ds}{dx}=\frac{h_t}{h} \tag{7.278a}$$

把它代入（7.275），得

$$h=h_t(s/R_p)^{1/2} \tag{7.278b}$$

用泰勒的相似律

$$\frac{S}{R_p}=\frac{x}{H} \tag{7.279}$$

得

$$h=h_t\left(\frac{x}{H}\right)^{1/2} \tag{7.280}$$

为了求得弹坑深度H，我们假定一切靶板的材料（在以R_p为半径之内的）在变形后都变成筒壁的材料。由

$$2\pi R_p\int_0^H h dx=\pi R_p^2 h_t \tag{7.281}$$

得

$$H=\frac{3}{4}R_p,\quad h=1.15h_t\sqrt{\frac{x}{R_p}} \tag{7.282}$$

以上也都是泰勒[7-17]的成果。

现在让我们考虑塑性变形功，先求A处的单位体积材料从A变到B处的应变功密度

$$dW=\int \sigma_\theta d\epsilon_\theta=\int_s^{R_P}\sigma_Y\frac{ds}{s}=\sigma_Y\ln\left(\frac{R_P}{s}\right) \quad (7.283)$$

总塑性功为

$$W^{(P)}=\int_0^{R_P}2\pi s h_t(dW)ds=2\pi h_t\sigma_Y\int_0^{R_P}s\ln\left(\frac{R_P}{s}\right)ds$$

$$=\frac{1}{2}\pi R_P^2 h_t\sigma_Y \quad (7.284)$$

这和泰勒的扩孔塑性功（7.181）相比，小了2.6倍。这是由孔径和厚度比例的实用范围不同所引起的。泰勒的系数是1.33，用在R_P/h_t在2以下的厚靶范围，汤姆逊的系数是0.5，用在$R_P/h_t \approx 8$左右的薄靶范围。

现在让我们考虑动力功。在扩孔中，当孔径为b时，在筒壁上已有质量M，它就是以b为半径的靶板的质量。

$$M=\pi b^2 h_t\rho_t \quad (7.284)$$

筒壁运动的速度为$\frac{db}{dt}$，动量为$M\frac{db}{dt}$，惯性力为

$$F=\frac{d}{dt}\left(M\frac{db}{dt}\right)=M\frac{d^2b}{dt^2}+\frac{dM}{dt}\ \frac{db}{dt} \quad (7.285)$$

这种惯性力做的功为

$$W^{(D)}=\int_0^{R_P}F\,db=\int_0^{R_P}\left(M\frac{d^2b}{dt^2}+\frac{dM}{dt}\ \frac{db}{dt}\right)db$$

$$=\pi\rho_t h_t\int_0^{R_P}b^2\frac{d^2b}{dt^2}db+2\pi\rho_t h_t\int_0^{R_P}b\left(\frac{db}{dt}\right)^2db \quad (7.286)$$

对于一般弹头而言，$b=b(x)$（见图7-24），所以

$$\left.\begin{aligned}\frac{db}{dt}&=\frac{db}{dx}\ \frac{dx}{dt}=\frac{db}{dx}v\\ \frac{d^2b}{dt^2}&=\frac{d^2b}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{db}{dx}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{d^2b}{dx^2}v^2+\frac{db}{dx}\ \frac{dv}{dt}\end{aligned}\right\} \quad (7.287)$$

其中 $v=\frac{dx}{dt}$ 为弹头的瞬时速度，于是

$$W^{(D)}=\pi\rho_t h_t\int_0^H b\frac{db}{dx}\left\{\left[b\frac{d^2b}{dx^2}+2\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right]v^2+b\frac{db}{dx}\frac{dv}{dt}\right\}dx \quad (7.288)$$

（a）锥形弹头（近似解）

$$b=\frac{R_p}{H}x,\quad \frac{db}{dx}=\frac{R_p}{H},\quad \frac{d^2b}{dx^2}=0 \quad (7.289)$$

则（7.288）为

$$W^{(D)}=\pi\rho_t h_t\left(\frac{R_p}{H}\right)^4\int_0^H\left\{2v^2+x\frac{dv}{dt}\right\}xdx \quad (7.290)$$

准确积分要看 v、$\frac{dv}{dt}$和 x 的关系。

汤姆逊认为在这样短的瞬间，我们可以把弹体看作是均速运动，即设

$$v=\text{const},\quad \frac{dv}{dt}=0 \quad (7.291)$$

代入上式，得

$$W^{(D)}=\pi R_p^2 h_t\rho_t\left(\frac{vR_p}{H}\right)^2 \quad (7.292)$$

总的穿透功为

$$W=W^{(P)}+W^{(D)}=\pi R_p^2 h_t\left[\frac{1}{2}\sigma_Y+\rho_t\left(\frac{vR_p}{H}\right)^2\right] \quad (7.293)$$

（b）卵形弹头（近似解）

$$b=R_p\sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{H} \quad (7.294)$$

有

$$\frac{db}{dx}=\frac{\pi}{2H}R_p\cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{H},\quad \frac{d^2b}{dx^2}=-\left(\frac{\pi}{2H}\right)^2R_p\sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{H} \quad (7.295)$$

则（7.288）为

$$W^{(D)}=R_p\left(\frac{\pi R_p}{4H}\right)^3\int_0^H\left\{\left(2\sin\frac{\pi x}{H}+3\sin\frac{2\pi x}{H}\right)v^2+\left(1-\cos\frac{2\pi x}{H}\right)\frac{dv}{dt}\right\}dx \tag{7.296}$$

如果是均速运动，$v=$常数，则可以证明

$$W^{(D)}=\frac{3}{16}\pi^3R_p^2\,h_t\rho_t\left(\frac{vR_p}{H}\right)^2 \tag{7.297}$$

卵形弹头的总的穿透功为

$$W=W^{(P)}+W^{(D)}=\pi R_p\,h_t\left[\frac{1}{2}\sigma_Y+\frac{3}{16}\pi^2\rho_t\left(\frac{vR_p}{H}\right)^2\right] \tag{7.298}$$

（c）锥形弹头的精确解[7-21](1958)

精确解可以从在x处的能量守恒定律开始。设弹体的质量m，撞击速度为v_0，在x点的能量守恒定律为

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\pi\rho_t h_t\int_0^x b\frac{db}{dx}\left\{\left[b\frac{d^2b}{dx^2}+2\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right]v^2+b\frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}v\right\}dx+\frac{1}{2}\pi b^2h_t\sigma_Y \tag{7.299}$$

对x求导数，得

$$mv\frac{dv}{dx}+\pi\rho_t h_t b\frac{db}{dx}\left\{\left[b\frac{d^2b}{dx^2}+2\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right]v^2+b\frac{db}{dx}\frac{dv}{dx}v\right\}+\pi b\frac{db}{dx}h_t\sigma_Y=0 \tag{7.300}$$

对于锥形弹头而言，把（7.289）代入上式，

$$\frac{m}{\pi\rho_t h_t}\frac{dv^2}{d(x^2)}+\left(\frac{R_p}{H}\right)^2\left[2v^2+x^2\frac{dv^2}{d(x^2)}\right]+\left(\frac{R_p}{H}\right)^2\frac{\sigma_Y}{\rho_t}=0 \tag{7.301}$$

积分得

$$\left[2\left(\frac{R_P}{H}\right)^2 v^2+\frac{\sigma_Y}{\rho_t}\right]\left[\frac{m}{\pi\rho_t h_t}+\left(\frac{R_P}{H}\right)^4 x^2\right]^2=C_1^* \quad (7.302)$$

C_1^* 用起始条件 $v=v_0$，$x=0$ 求得为

$$C_1^*=\left[2\left(\frac{R_P}{H}\right)^2 v_0^2+\frac{\sigma_Y}{\rho_t}\right]\left(\frac{m}{\pi\rho_t h_t}\right)^2 \quad (7.303)$$

代入（7.302），经整理后，v^2为

$$v^2=\frac{k_1^2 v_0^2}{\left[k_1+\left(\frac{R_P}{H}\right)^4 x^2\right]^2}-\frac{k_1\sigma_Y}{\rho_t}\left(\frac{R_P\ x}{H}\right)^2\frac{\left[1+\frac{1}{2k_1}\left(\frac{R_P}{H}\right)^4 x^2\right]}{\left[k_1+\left(\frac{R_P}{H}\right)^4 x^2\right]}$$

(7.304)

其中

$$k_1=\frac{m}{\pi\rho_t h_t} \quad (7.305)$$

在 $x=H$时，$v=0$ 的 v_t 即是弹道极限速度 v_{50}，它是

$$v_{50}=R_P\sqrt{\frac{\pi\sigma_Y h_t}{m}\left(1+\frac{R_P^4}{2k_1H^2}\right)} \quad (7.306)$$

（d）卵形弹头的精确解

把（7.294）、（7.295）代入（7.300），得运动方程：

$$\left[k_1+\frac{\pi^2R_P^4}{16H^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{H}\right)\right]\frac{dv^2}{dx}$$
$$+\frac{\pi^3R_P^4}{16H^3}\sin\frac{\pi x}{H}\left[1+3\cos\frac{\pi x}{H}\right]v^2$$
$$+\frac{\pi R_P^2}{2H}\frac{\sigma_Y}{\rho_0}\sin\frac{\pi x}{H}=0 \quad (7.307)$$

其解为

$$v^2\left\{1+\frac{\pi^2R_P^4}{16H^2k_1}\sin^2\left(\frac{\pi x}{H}\right)\right\}^{1/2}\left\{\frac{1-\eta\cos\left(\frac{\pi x}{H}\right)}{1+\eta\cos\left(\frac{\pi x}{H}\right)}\right\}^{\eta/2}$$
$$+\frac{\pi\sigma_Y R_P^2}{4\rho_t H}\int_0^x\left[1+\frac{\pi^2R_P^4}{16H^2k_1}\sin^2\left(\frac{\pi x}{H}\right)\right]^{1/2}$$

$$\times\left\{\frac{1-\eta\cos\dfrac{\pi x}{H}}{1+\eta\cos\dfrac{\pi x}{H}}\right\}^{\eta/2}\sin\frac{\pi x}{H}dx=v_0^2 \tag{7.308}$$

其中

$$\eta^2=\frac{\pi^4R_p^4}{16H^2k_1\left(1+\dfrac{\pi^4R_p^4}{16H^2k_1}\right)} \tag{7.309}$$

而弹道极限速度为

$$v_{50}^2=\frac{\pi\sigma_YR_p^2}{4\rho_tH_0}\int_0^L\left[1+\frac{\pi^2R_p^4}{16H^2k_1}\sin^2\left(\frac{\pi x}{H}\right)\right]^{1/2}$$

$$\times\left\{\frac{1-\eta\cos\dfrac{\pi x}{H}}{1+\eta\cos\dfrac{\pi x}{H}}\right\}^{\eta/2}\sin\frac{\pi x}{H}\,dx \tag{7.310}$$

这里把摩擦的热效应略去了。因为汤姆逊证明，热效应很小，特别在低弹道速度范围，更加小。

参 考 文 献

〔7-1〕 K. E. Spells, Proc. Phys. Soc., (London) B64, 212(1951).

〔7-2〕 E. Martel, S. A. 2, (1897).

〔7-3〕 R. F. Recht and T. W. Ipson, J. Applied Mechanics, ASME, 30, 384 (1963).

〔7-4〕 Andrew Pytel and Norman Davids, A Viscous Model for Plug Formation in Plates, J. of Franklin Institute, 276, pp394-406(1963).

〔7-5〕 F. A. Bakhsiyan, On the Visco-Plastic Flow in a Plate Produced by a Shock with a Cylinder, ПMM, 12, №.1(1948).

〔7-6〕 P. C. Chou, Proc. 5th Symposium of Hypervelocity Impact, I (Pt 1), 307(1962).

〔7-7〕 H. R. Minnich and N. Davids, Interim Tech. Rept. №.3, AROD Contract №. DA 31-124, Pennsylvania State University, Department of Engineering Mechanics (1964).

〔7-8〕 N. Cristescu and M. Predeleanu, Analele Stiint University, Al. I. Cuza, Iasi, Sec. 1, 6, 734(1960), see N. Cristescu, Dynamic Plasti-

city, North-Holland (1967).

[7-9] A. M. Kochetkov, On the Propagation of Elastic-visco-plastic Shear waves in Plates, ПММ, 14, №.2 (1950).

[7-10] R. G. Thomsom, NASA Tech. Rept., R-221 (1965).

[7-11] L. E. Fugelso and F. H. Bloedow, DDC. AD636 224(1966).

[7-12] V. N. Kukud janov, The propagation of Cylindrical Stress Shock Waves in Plates Beyond the Yield Point. Trudi METI, 3, pp108-120 (1959).

[7-13] V. N. Kukud janov, Transverse Shock of a Plate by a Rotating Cylinder, Trudi MFTI, 2 (1958).

[7-14] R. G. Thomson and E. T. Kruszewski, Proc. 7th Symp. of Hypervelocity Impact 5 (1965).

[7-15] 钱伟长，刚性平头弹体撞击粘塑性靶板的理论 (1965)，未发表。

[7-16] H. Bethe, Report №. UN-41-4-23 Frankford Arsenal, Ordnance Laboratory (1941).

[7-17] G. I. Taylor, The formation and Enlargement of a Circular Hole in a Thin Plastic Sheet, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 1, 103-124. (1948).

[7-18] W. Freiberger, A Problem in Dynamic Plasticity, the Enlargement of a Circular Hole in a Flat Sheet, Proc. of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 48, pp135-148(1952)

[7-19] G. I. Taylor, Notes on Bethe's Theory of Armour Penetration, Ministry of Home Security Report, R. C. 280(1941).

[7-20] W. T. Thomson, An Approximate Theory of Armor Penetration. J. Applied Physics, 26, 80-82(1955).

[7-21] M. S. Sodha and V. K. Jain, J. Applied Physics, 29, 1769(1958).

第八章　薄板靶体的侵入和击穿(下)

§8.1　截顶锥形弹头的弹体的击穿运动(勃朗1964)

勃朗（1964）[8-1]研究了截去尖顶的锥形弹头的刚性弹体，在撞击垂直靶板时击穿靶板的运动理论，所用方法和汤姆逊处理尖头弹体的方法相类似（§7.8），只用了能量守恒定律，没有考虑动量守恒定律。

靶板的变形见图8-1。靶板除了有一部份是筒形变形外，有两点和汤姆逊的尖头弹体不同：（1）在截顶的一部份弹头上，有面积和截顶面积相等的靶板被挤凿去了；（2）弹孔除了一段筒形(半径和弹体半径R_p相等)外，在弹孔根部还有一段锥形的靶板材料，它的斜角（指锥面和板面的夹角）为ζ，外径为R_μ。他更进一步假设，在筒形和锥形段内，都只有环向应力起作用，而且$\sigma_\theta=\sigma_Y$。筒形段的变形速度为v_a，锥形段的变形速度等于$v_a(R_\mu-r)/(R_\mu-R_p)$，它们都是轴向速度，v_a是和r无关的。

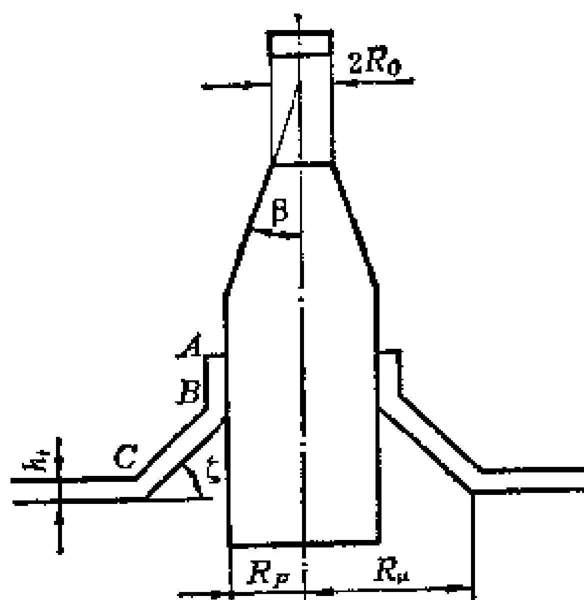


图8-1　截顶锥形弹头的弹体在撞击中引起的靶板变形

这里一共有三种能量：

（1）形成AB和BC两段弹孔的塑性变形功，其计算与§7.8中的完全相类似，结果为

$$W^P=\frac{1}{2}\pi h_t\sigma_Y\left[R_p^2-R_0^2-2R_0^2\ln\frac{R_p}{R_0}+2(R_\mu^2-R_p^2)\ln\cos\zeta\right] \tag{8.1}$$

（2）动力所作的功，计算方法相同，这种功分三部份。弹顶挤凿下来那一块靶板的轴向运动的动力功；圆筒部分的轴向和径向运动的功；锥形部份的轴向运动的功。总起来是

$$W^D=\frac{1}{12}\pi\rho_t h_t v_\alpha^2\Big\{(R_\mu+3R_P)(R_\mu-R_P)+12\Big[R_P^2-\frac{1}{2}R_0^2+(R_P^2-R_0^2)\Big(\frac{R_P-R_D}{L_N}\Big)^2\Big]\Big\} \quad (8.2)$$

式中的v_α可以用其它方法决定（如动量守恒律）。

（3）最后，还有剪断能，即弹顶挤凿那块靶板所耗的能

$$W^S=\pi R_0 h_0^2\sigma_{US} \quad (8.3)$$

其中σ_{US}为剪切破坏强度。

在击穿时的弹道极限速度v_{50}由下式决定

$$\frac{1}{2}mv_{50}^2=W^P+W^D+W^S \quad (8.4)$$

§8.2 花瓣型击穿和采特-保尔动量理论(1957～1959)

在前面所讲的理论中，并没有涉及一些变形模式。但这些模式可能占有很大一部份总能量，有一些理论分析认为击穿过程中引起靶板断裂，裂缝开始发生在弹尖，当弹体前进而扩大弹孔时，靶体裂缝向外发展，这种分析就略去了靶板的强度。它首先得假设：由于击穿过程很快，当弹体穿越靶板时，靶板内部各点受撞击影响的，只局限于比弹径大不了多少的很小范围以内（这个范围的半径为r_A），在这范围以外，靶体的材料在击穿过程中根本没有参加运动。其次得根据实际情况，假设某种变形的形式。这种解的可靠性主要看选用的弹孔变形的形式是否合乎实际。

这一方面的工作主要是普林斯登大学的弹道研究组和柏格来的加里福尼亚大学的相应研究组在第二次世界大战中进行的，在大战结束后工作停止了。普林斯登的代表人物是采特和保尔，他

们后来在毕德门顿物理研究所内把这方面的工作整理发表了[8-2,8-3,8-4](1957～1959)。加里福尼亚的代表人物是里希脱和尹波森，他们的工作是在晚些时间发表的(1963)[8-5]。其它还有采特和保尔发表的另一些著作（1956～1957）[8-6,8-7]。

有关花瓣型击穿的靶板破坏形状和所用记号见图8-2。

设r_Λ为弹体击穿靶板时的最大作用范围。在这个作用范围内，并无其它外力参加击穿运动。于是，对这个系统有动量守恒定律

$$mv_0=mv+M_t(x) \tag{8.5}$$

其中m为弹体质量，v为弹头越过靶板后x处的弹体速度，v_0为弹体的撞击速度，$M_t(x)$为当弹头越过靶板后至x时，靶板的动量，它只是x的函数。我们只要研究$M_t(x)$的表达式。

某一靶板质点，在未变形前处于离轴s处，变形后到达(r，ξ)处。如果把这个质点看作为代表以s为半径，ds为宽度的一个圆环，则这个圆环在弹头越过靶板x距离后在x方向的动量为

$$dM_t=2\pi\rho_t s\dot{\xi}dsh_t \tag{8.6}$$

其中ρ_t为靶板密度，h_t为靶板原来的厚度。弹体位移x是单调增长的量，这个量可以用来作为本题的一个独立自变量。质点速度$\dot{\xi}=\dfrac{d\xi}{dt}$可以化为

$$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial x}=v\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad \xi=\xi(s,x) \tag{8.7}$$

v为弹体的瞬时速度，所以

$$M_t=2\pi\rho_t h_t\int_{s_{\min}}^{r_\Lambda}vs\frac{\partial\xi}{\partial x}ds \tag{8.8}$$

对于尖头弹体而言，$s_{\min}=0$；对于截顶的弹体而言，$s_{\min}$等于截顶的半径。如果称$m_t(x)$为靶体在弹体位移为x时的有效质量，则

$$m_t(x)=\frac{M_t}{v}=2\pi\rho_t h_t\int_{s_{\min}}^{r_\Lambda}s\frac{\partial\xi}{\partial x}ds \tag{8.9}$$

用（8.5）和（8.9），我们得

$$\Delta v=v_0-v=\frac{m_t(x)}{m}v \tag{8.10}$$

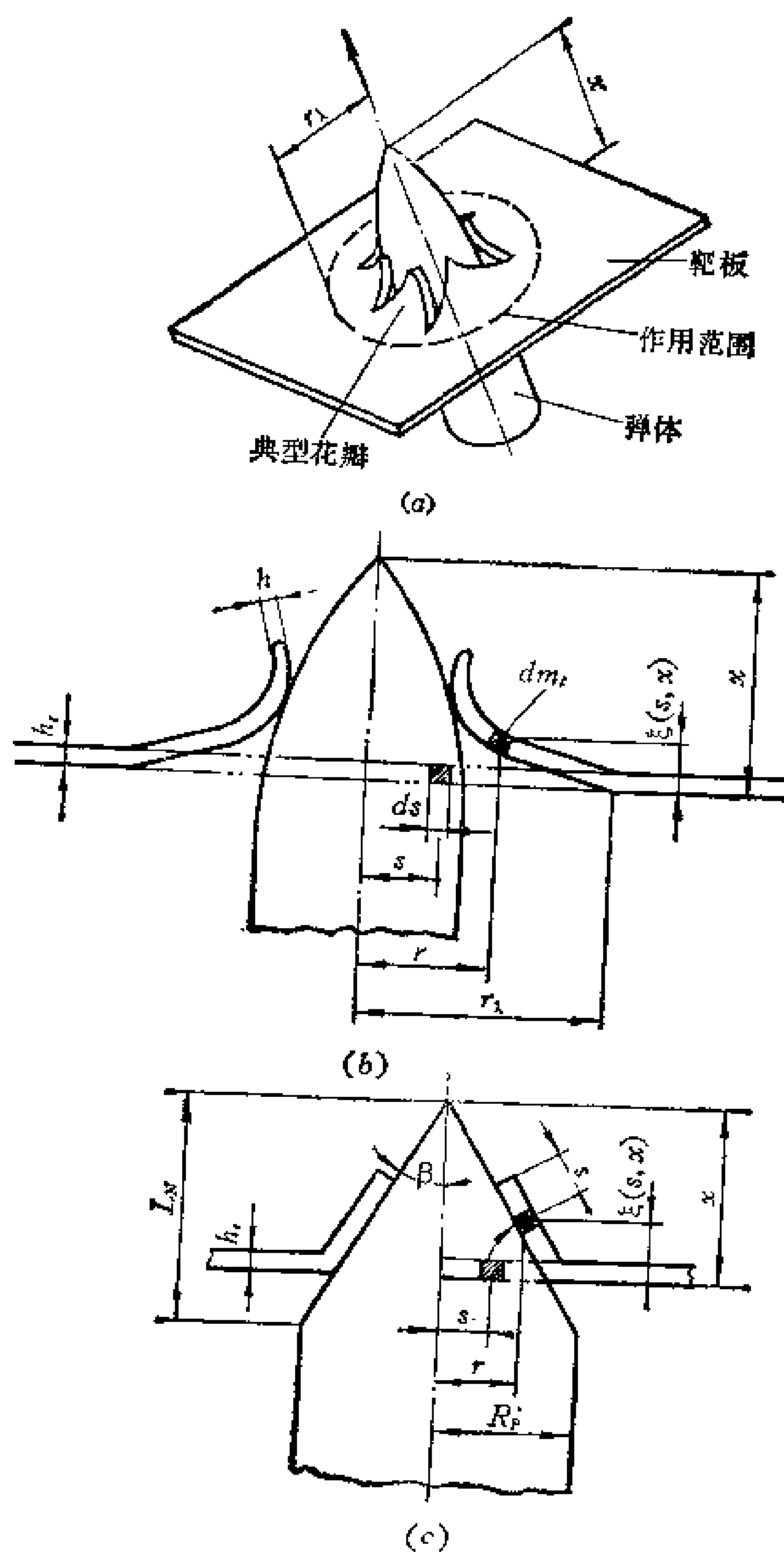


图8-2　花瓣型击穿的靶板破坏形状及所用记号
(a) 花瓣型击穿图示；(b) 花瓣型击穿所用符号；(c) 锥形弹头的花瓣型击穿。

从本式的积分和微分，我们可以求得位移和加速度。当然，如果$m_t(x)$是确切知道的，或$\xi(s,x)$是确切知道的话，则我们的解是较精确的解。但在大多数情况下$\xi(s,x)$是不知道的，我们只能根据情况，以物理学的角度来假设可能的运动模式，从而求得有效解。

今以锥形弹头的弹孔来说明这个问题。锥形弹头在撞击中既造成锥孔，又能造成花瓣型破坏，见图8-3。多数的情况是花瓣型破坏，只有极少数是完整的锥形弹孔。不过，我们在这里可以设靶板按锥形的弹孔变形（如图8.2c），但没有强度。我们只重视这种变形的运动方面，而忽略这种变形的内部应力的束缚。例如，我们认为裂缝造成花瓣，从而认为对弹头面不产生压力。从这种假设中可以看到，对低速撞击将出现较大误差，因为在低速撞击中，塑性功将是重要的，相比而言，靶体运动的惯性力将是很小的。反之，这个理论在高速撞击中将是重要的，它和实际比较符合。

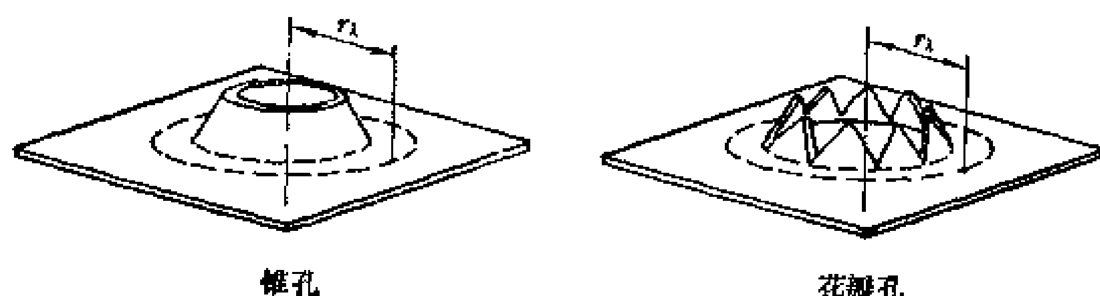


图8-3　锥形弹头在靶体上形成的弹孔形式

由于弹孔周边有裂缝，在花瓣上就没有径向伸长(这一点已由实验证实）。在原靶离轴s处的材料，在变形后，离孔壁的顶端，也是s（见图8.2c）。因此，变形后的位置离原来靶面为

$$\xi = x\sin\beta - s\cos\beta \tag{8.11}$$

所以

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \sin\beta \tag{8.12}$$

而且积分（8.9）的下限$s_{min}=0$，上限r_A只达到锥孔基层，$r_A = x\tan\beta$。

$$m_t(x)=2\pi\rho_t h_t\int_0^{x\tan\beta} s\sin\beta ds$$
$$=\pi\rho_t h_t(x\tan\beta)^2\sin\beta \qquad (8.13)$$

于是（8.10）可以写成

$$\Delta v(x)=\frac{\pi\rho_t h_t}{m}(x\tan\beta)^2 v\sin\beta \qquad (8.14)$$

其实这就是靶体的变形部份的质量和弹体质量之比乘 $v\sin\beta$。如果Δv很小，则式中 v 可以用撞击速度v_0来代替。

如果弹头完全穿过靶板，则击穿就算完成了。这时的$x\tan\beta=R_p$。于是总的Δv为$(\Delta v)_f$：

$$(\Delta v)_f=\frac{\pi\rho_t h_t R_p^2}{m}v_0\sin\beta \qquad (8.15)$$

图8-4是实验和理论的比较，其中有五条根据实验数据绘制的曲线，有三条理论曲线。曲线A和B都是能量法（即汤姆逊法§7.8）的结果。但曲线A用的$\sigma_Y=407MPa$，曲线B用的是$\sigma_Y=1586$MPa。曲线C是（8.15）式的动量法理论曲线，它和σ_Y无关。很易看到，在低速范围内，能量法理论较合实际，在高速范围内，动量法理论更合实际。其交界范围内的撞击速度约在500米/秒左右。

现在让我们分析弹体所受的力。由于花瓣对弹头没有接触压力，所以弹体和弹孔之间的作用和反作用都是通过花瓣的根部传递的。根据对称考虑，这种力一定平均分配在花瓣根部的圈环上。总的轴向合力为F，

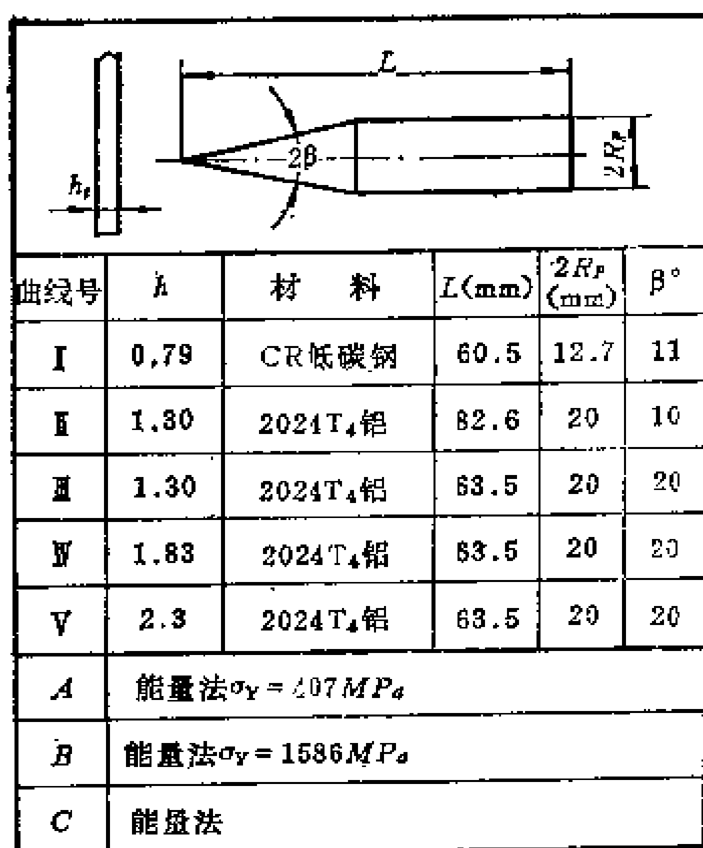
$$F(x)=-mv\frac{dv}{dx} \qquad (8.16)$$

根据（8.10）微分得

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{m}\frac{dm_t(x)}{dx} \qquad (8.17)$$

代入（8.16）得（当$\Delta v\ll v_0$）

$$F_x=v^2\frac{dm_t(x)}{dx}\approx v_0^2\frac{dm_t(x)}{dx} \qquad (8.18)$$



曲线号	h	材　料	L(mm)	$2R_p$ (mm)	β°
Ⅰ	0.79	CR低碳钢	60.5	12.7	11
Ⅱ	1.30	2024T_4铝	82.6	20	10
Ⅲ	1.30	2024T_4铝	63.5	20	20
Ⅳ	1.83	2024T_4铝	63.5	20	20
Ⅴ	2.3	2024T_4铝	63.5	20	20
A	能量法$\sigma_Y = 407MPa$				
B	能量法$\sigma_Y = 1586MPa$				
C	能量法				

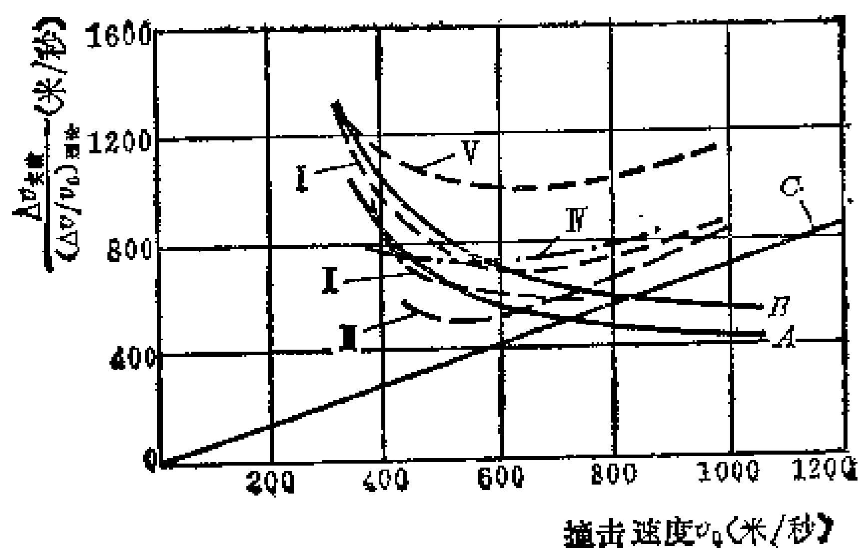


图8-4　锥形弹头速度损失的理论和实验的比较(并附表)

这个公式对各种形状的弹头都适用。

对于锥形弹头而言，把（8.13）代入（8.18）得

$$F_x = 2\pi\rho_t h_t v_0^2 x\tan^2\beta\sin\beta \tag{8.19}$$

把这个轴向力平均分配在弹孔根部圆周$2\pi x\tan\beta$上，每单位长度弹孔根部圆周上所受力为

$$f_x = \frac{F_x}{2\pi x\tan\beta} = \rho_t h_t v_0^2\tan\beta\sin\beta \tag{8.20}$$

也可以计算花瓣根部所受径向力，从图8-2 c 有

$$r = (x - \xi)\tan\beta \tag{8.21}$$

所以，径向速度为

$$\dot{r} = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\tan\beta \tag{8.22}$$

但从（8.11）有

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{ds}{dt} = v\sin\beta \tag{8.23}$$

代入（8.22），给出

$$\dot{r} = v(1 - \sin\beta)\tan\beta \tag{8.24}$$

设弹孔上一共有 n 片花瓣，每块花瓣的质量为

$$m_{瓣} = \frac{1}{n}\pi\rho_t h_t (x\tan\beta)^2 \tag{8.25}$$

每一花瓣的径向动量为

$$M_r = m_{瓣}\dot{r} = \frac{1}{n}\pi\rho_t h_t (x\tan\beta)^2 v\tan\beta(1 - \sin\beta) \tag{8.26}$$

每一花瓣所受的径向力为

$$F_r = \frac{dM_r}{dt} = v\frac{dM_r}{dx} \tag{8.27a}$$

或

$$F_r = \frac{2\pi\rho_t h_t}{n} x\tan^3\beta(1 - \sin\beta)v^2\left(1 + \frac{x}{2v}\frac{dv}{dx}\right) \tag{8.27b}$$

利用（8.14），求 v 对 x 的导数，

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2\pi\rho_t h_t x\tan^2\beta}{m}\,v\sin\beta$$
$$+\frac{\pi\rho_t h_t x^2\tan^2\beta}{m}\,\frac{dv}{dx}\sin\beta \tag{8.28a}$$

解出$\frac{dv}{dx}$，我们有

$$\frac{x}{2v}\,\frac{dv}{dx}=\frac{\dfrac{\pi\rho_t h_t x^2\tan^2\beta}{m}\sin\beta}{1-\dfrac{\pi\rho_t h_t x^2\tan^2\beta}{m}\sin\beta} \tag{8.28b}$$

但从（8.14），我们有

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{\pi\rho_t h_t x^2\tan^2\beta}{m}\sin\beta \tag{8.29}$$

所以有

$$\frac{x}{2v}\,\frac{dv}{dx}=\frac{\dfrac{\Delta v}{v}}{1-\dfrac{\Delta v}{v}} \tag{8.30a}$$

或

$$1+\frac{x}{2v}\,\frac{dv}{dx}=\frac{v}{v-\Delta v}=\frac{v}{v_0} \tag{8.30b}$$

代入（8.27b），得

$$F_r=\frac{2\pi\rho_t h_t}{n}x\tan^3\beta(1-\sin\beta)\frac{v^3}{v_0} \tag{8.31}$$

但$\Delta v \ll v$，或$v\approx v_0$，上式简化为

$$F_r=\frac{2\pi\rho_t h_t}{n}\tan^3\beta(1-\sin\beta)xv_0^2 \tag{8.32}$$

在弹孔根部圆周上单位长度所受径向力f_r为

$$f_r=\frac{F_r}{\dfrac{2\pi x\tan\beta}{n}}=\rho_t h_t\tan^2\beta(1-\sin\beta)v_0^2 \tag{8.33}$$

合力f为

$$f=\sqrt{f_x^2+f_r^2}=\rho_r h_r v_0^2 \tan^2\beta \sqrt{2(1-\sin\beta)} \qquad (8.34)$$

这个力的指向和 x 轴的夹角为 α

$$\tan\alpha=\frac{f_r}{f_x}=\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta} \qquad (8.35)$$

所以有

$$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\beta \qquad (8.36)$$

α 和 β 角的关系见图 8-5。α 角是花瓣上所受力的方向，在撞击过程中，经常有花瓣在弹孔根部折断而飞出，这种花瓣飞出的方向，基本上和实验是一致的。对于高速撞击而言，可以说是完全一致的。

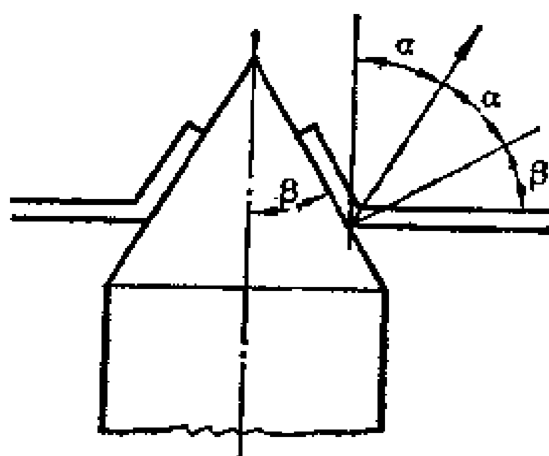


图8-5 折断花瓣的飞出方向

§8.3 截顶弹头的花瓣型击穿的采特-保尔动量理论(1958)[8-4]

如果弹头是截顶的，则撞击靶板时，只要撞击速度有足够快，必然会在靶板上挤凿出和截顶面积相同的一块靶块。这块靶板的速度由实验证明应等于撞击速度乘1.5～1.0。亦即

$$v_{r0}=Kv_0, \quad 1<K<1.5 \qquad (8.37)$$

其中K为一个实验系数，v_0为撞击速度。K值和撞击速度及靶厚有关。撞击速度越高，K越大；靶厚越大，K越小。几种情况的实验值列于表8-1。这个比例系数的最高值，大约在1.5左右。这些系数的上限相应于靶体凿块是弹性的而弹体则为刚性的那种撞击，而下限则相应于靶块紧贴在弹体截顶上的情况。

在一般情况下，靶板被挤凿出一块靶块后，其余部份应该还有动量，但它比靶块的动量小，只占有10～20%。由于靶块的动量在总动量中，本来就只占较小一部份，所以靶板的动量完全可以略

表8-1 靶块逸出速度和撞击速度的比例系数

靶厚（英寸）	撞击速度（英尺/秒）	K（实验）
0.04	2510	1.33
0.125	2590	1.23
0.04	900	1.16
0.125	900	1.11

去不计。

（1）截顶锥形弹头的弹体的速度损失

设锥形弹头的顶部截去L_0长的一段，其截面半径为R_0（图8-6）。和§8.2一样，其速度损失在考虑了截顶平面挤凿出去的靶块的动量以后，可以写成

$$\Delta v=\frac{Km_0v_0+m_tv}{m} \tag{8.38}$$

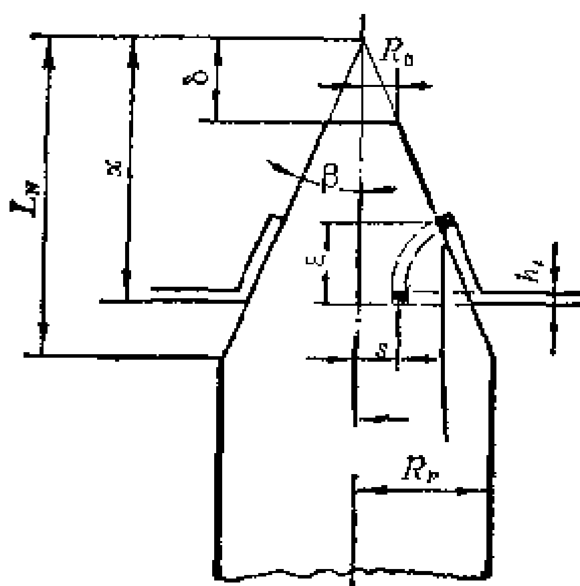


图8-6 截顶锥形弹体击穿靶体时的几何尺寸

其中m_0为靶体上挤凿下来的靶块质量

$$m_0=\pi R_0^2\rho_th_t \tag{8.39}$$

m_t为靶体运动中的有效质量

$$m_t(x)=2\pi\rho_th_t\int_{R_0}^{x\tan\beta}\frac{d\xi}{dx}s\,ds \tag{8.40}$$

其中

$$\xi = x\sin\beta - s\cos\beta \qquad (8.41)$$

当$\Delta v \ll v_0$时，(8.38) 可以写成

$$\Delta v(x) = \pi\rho_t h_t \frac{v_0}{m}\tan^2\beta[KL_0^2 + (x^2 - L_0^2)\sin\beta] \qquad (8.42)$$

当$x = L_N$时，弹体才算完成了击穿过程。总的速度损失为

$$\Delta v_{总} = \Delta v(L_N) = \pi\rho_t h_t \frac{v_0}{m}[KR_0^2 + (R_P^2 - R_0^2)\sin\beta] \qquad (8.43)$$

在凿去了那块靶块以后，截顶的和尖顶的锥形弹体的运动是相同的，所以二者花瓣上所受力也都相同。

（2）截顶卵形弹尖的弹体的速度损失

我们假定弹孔上的花瓣是在弹孔根部圆周上和弹头表面接触的，而且切于弹头表面（图8-7）。

图8-7 截顶卵形弹头的尺寸和记号

当弹体位移为x时，靶体上离靶s处的材料向前移动了ξ。

$$\xi = (y - s)\cos\theta \qquad (8.44)$$

我们在这里设卵形弹头的曲线为以O点为中心以a为半径所绘的圆的一部份。θ是弹头曲线的切线和轴线所成的夹角。根据图8-7

$$x = L_N - a\sin\theta \tag{8.45a}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{a\cos\theta} \tag{8.45b}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{L_N - x}{y + (a - R_p)} \tag{8.45c}$$

还有

$$\frac{L_N}{a} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_p}{a}\right)^2} \tag{8.46a}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{R_p}{a} - 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L_N}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L_N}\right)^2} \tag{8.46b}$$

所以，通过计算，我们求得

$$\Delta v(x) = \frac{2\pi\rho_t h_t a^2 v_0}{m} \left\{ \frac{1}{2} K\left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \right.$$
$$+ \frac{1}{6} \frac{L_N}{a}\left(\frac{y}{a} - \frac{R_0}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{L_N}\right)$$
$$\left. \times \left[3\left(\frac{y}{a} + \frac{R_0}{a}\right) + \frac{\left(\frac{y}{a} - \frac{R_0}{a}\right)\left(\frac{y}{a} + 2\frac{R_0}{a}\right)}{\left(\frac{y}{a} + 1 - \frac{R_p}{a}\right)} \right] \right\} \tag{8.47}$$

对尖头卵形弹头而言，$R_0 = 0$，得

$$\Delta v(x)_{尖头} = \frac{2\pi\rho_t h_t a^2 v_0}{m}\left(\frac{L_N}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{R_p}\right)$$
$$\times \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{\frac{y}{a}}{\left(\frac{y}{a} + 1 - \frac{R_p}{a}\right)} \right\} \tag{8.48}$$

在弹头表面和花瓣根部之间，只要花瓣动量不断增加，总是处于受压的状态之下。只要动量不变，而且变化速度继续减小时，按

我们的模型而言，花瓣和弹体就脱离接触。所以花瓣和弹体脱离接解的求解条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}(\text{花瓣动量})=0\\&\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\text{花瓣动量})<0\end{aligned}\right\}\qquad(8.49)$$

从 (8.47) 可以看到花瓣动量在 $x=L_0$，$x=L_N$ 时，都等于零，在这个域内，到处都大于零。因此，它在 $L_0\leqslant x\leqslant L_N$ 之间，至少有一个极大点。所以，卵形弹头的弹体撞击靶板，在击穿（即 $x=L_N$）以前，必有一个脱离点 x^*，在这一点上，花瓣脱离弹体表面。这个脱离点的位置 x^*，必满足

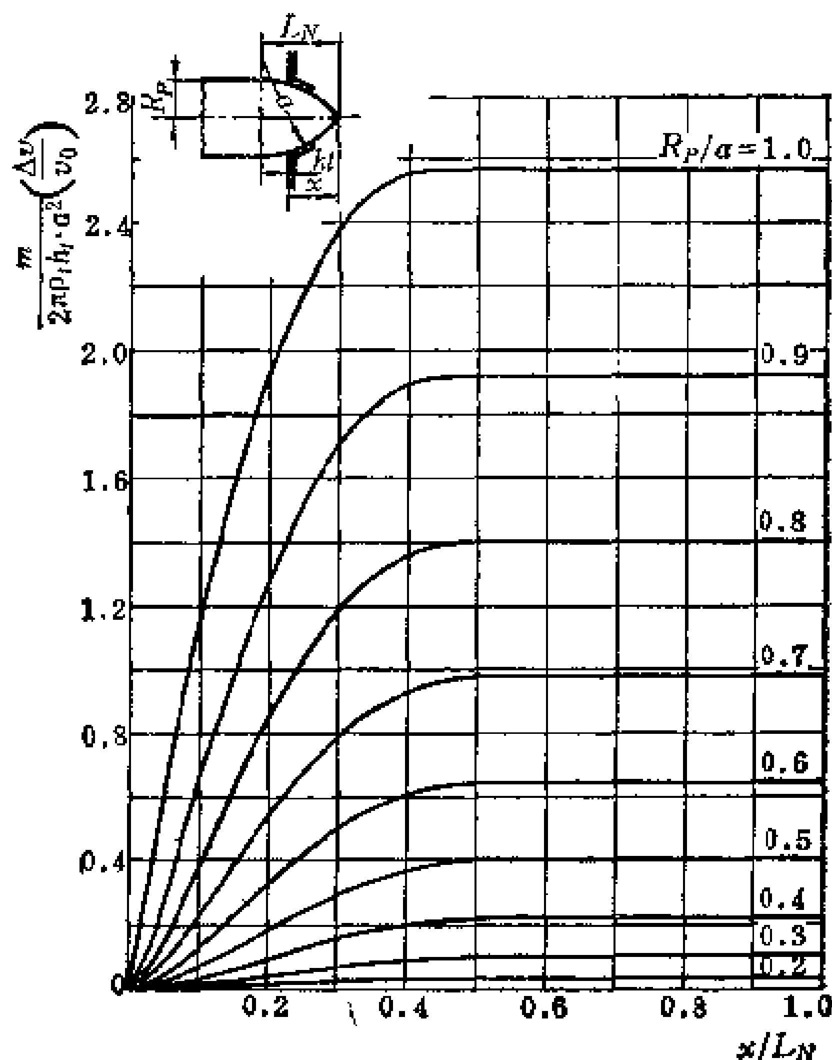


图8-8　尖头卵形弹体的速度损失对弹体位置的关系

$$L_0 < x^* < L_N \tag{8.50}$$

所以

$$\Delta v_{总} = \Delta v(x^*) \tag{8.51}$$

图8-8为尖头卵形弹体的速度损失$\Delta v(x)$对x/L_N的关系。图8-9为尖头卵形弹体总的速度损失$\Delta v_{总}$对R_p/a的关系。

对于$\frac{R_p}{a} > 0.12$，图8-9上的曲线可以近似地写成

$$\Delta v_{总} = \frac{2\pi\rho_t h_t a^2 v_0}{m} 0.249 \left(\frac{R_p}{a}\right)^{2.60} \tag{8.52}$$

当 $\frac{R_p}{a} \to 1$ 时，弹头成为半球。在这时，撞击变为挤凿过程，上述理论就不适用了。所以$\frac{R_p}{a} \to 1$ 的极限，在图上应予特殊处理。

对于截顶的卵形弹头的弹体而言，$\Delta v(x)$应该分为 两部份。即$\Delta v(x)_{花瓣}$和$\Delta v_{塞块}$。

$$\Delta v(x) = \Delta v(x)_{花瓣} + \Delta v_{塞块} \tag{8.53}$$

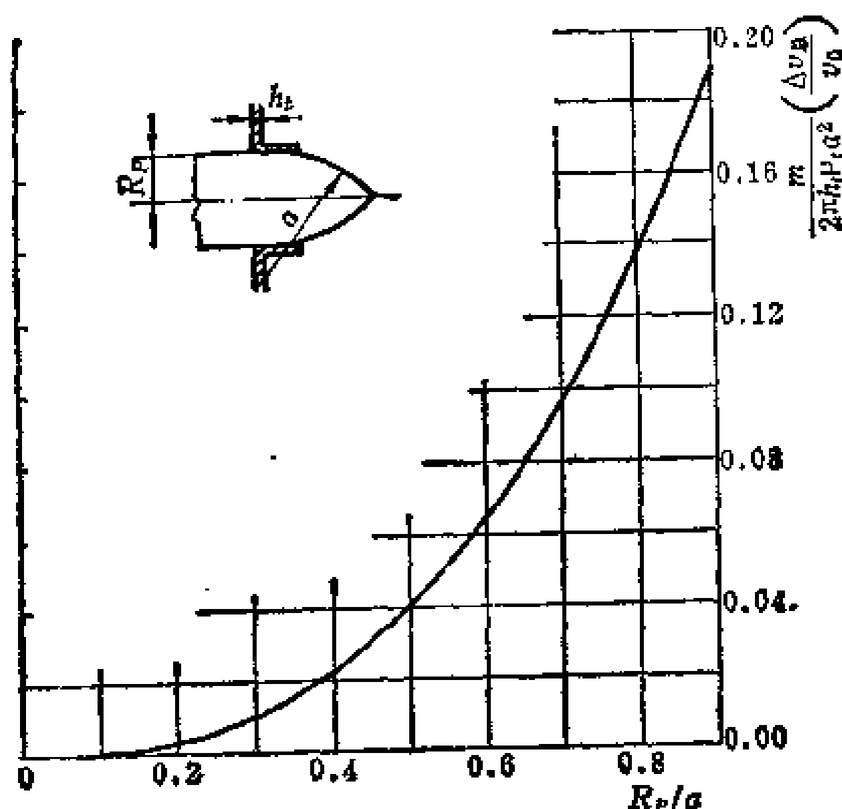


图8-9　尖头卵形弹体总的速度损失对R_p/a的关系

其中

$$\Delta v_{凿块}=\frac{\pi\rho_t h_t v_0}{m}KR_0^2 \qquad (8.54a)$$

$$\Delta v(x)_{花瓣}=\frac{\pi\rho_t h_t v_0}{6m}(y-R_0)(L_N-x)$$

$$\times\left[3\left(\frac{y}{a}+\frac{R_0}{a}\right)+\frac{\left(\frac{y}{a}-\frac{R_0}{a}\right)\left(\frac{y}{a}+2\frac{R_0}{a}\right)}{\frac{y}{a}+1-\frac{R_0}{a}}\right] \qquad (8.54b)$$

前者和x无关。图8-10为$\Delta v(x)_{花瓣}$和x^*/L^*的关系曲线，其中$x^*=x-L_0$，$L^*=L_N-L_0$，它们都是从截顶平面算起的。

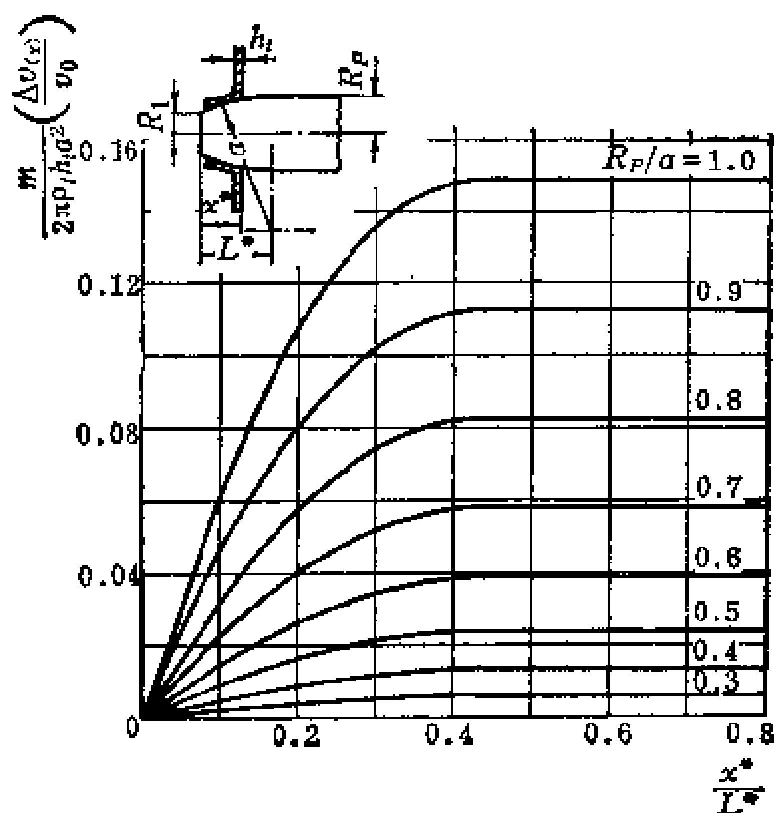


图8-10　截顶卵形弹头的弹体的速度损失
(由于花瓣造成)和x^*/L^*的关系曲线

图8-11为截顶卵形弹头的弹体的速度损失和R_0/R_P的关系曲线。图中在R_0/R_P较大时，凿块的速度损失也包括在内。这里指出凿块所引起的速度损失占极大部份。

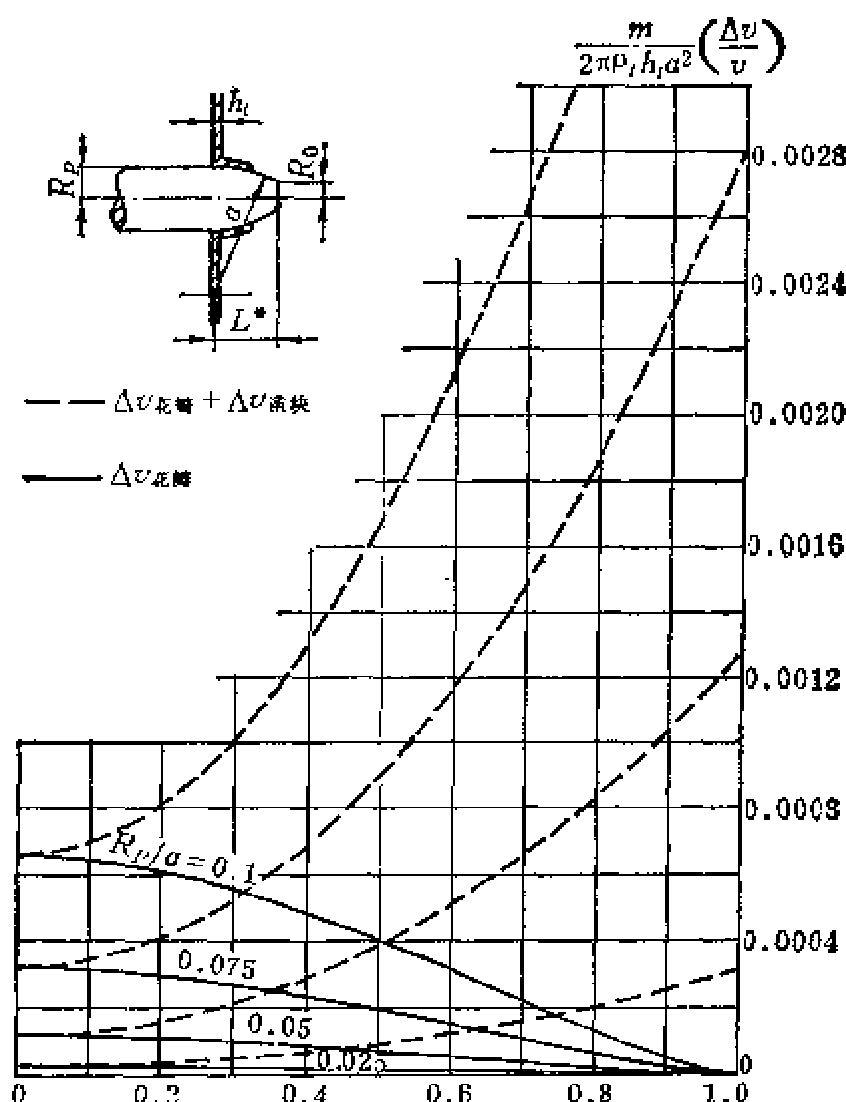


图8-11 截顶卵形弹头的弹体的总速度损失和R_0/R_p的关系〔取$K=1$，对其它K值可以按（8.54 a）计算〕

（3）尖头卵形弹头的弹体作用在花瓣上的力

（i）轴向力 （8.18）式业已证明，当$\Delta v \ll v_0$时，轴向力F_x为$v_0^2\frac{dm(x)}{dx}$。从前面（8.10）和（8.48）式中，可以求得$m(x)$，再用（8.45a、c）消去x，即得

$$m(x)=2\pi\rho_l h_l a^2\left(\frac{y}{a}\right)^2\left[\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{y}{6a}\tan\theta\right] \quad (8.55)$$

于是，在利用了（8.45b）后，得

$$F_x = v_0^2\frac{dm(x)}{dx} = 2\pi\rho_t h_t v_0^2 y\left\{\tan\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{y}{a}(\tan^2\theta - 1) - \frac{1}{6\sin^2\theta}\left(\frac{y}{a}\right)^2\right\} \tag{8.56}$$

在弹体和靶板的接触圆上，单位长度所受轴向力为f_x

$$f_x = \frac{F_x}{2\pi y} \tag{8.57}$$

在用了几何关系式

$$\frac{y}{a} = (\cos\theta - 1) + \frac{R_P}{a} \tag{8.58}$$

后，单位长度上的轴向力可以写成

$$f_x = \rho_t h_t v_0^2\left[c_0 + c_1\frac{R_P}{a} + c_2\left(\frac{R_P}{a}\right)^2\right] \tag{8.59}$$

其中

$$c_0 = \tan\theta\sin\theta - (1 - \cos\theta) \times\left[\frac{1}{2}\tan^2\theta + \frac{1-\cos\theta}{6\cos^3\theta} - \frac{1}{2}\right] \tag{8.60a}$$

$$c_1 = \frac{\cos\theta + 2}{6\cos^3\theta} - 1 \tag{8.60b}$$

$$c_2 = -\frac{1}{6\cos^3\theta} \tag{8.60c}$$

如果要把（8.59）化为x的函数，则我们可以利用（8.45a）的关系。图8-12，8-13分别为F_x和f_x对$\frac{x}{L_N}$的曲线。

（ii）径向力　从图8-7有

$$r = y - (y - s)\sin\theta \tag{8.61}$$

在弹体和靶体接触圆圈处，即（x，y）处的径向速度为

$$\dot{r} = v\frac{dr}{dx} = v\left[\left(1 - \frac{L_N - x}{a}\right) + \frac{y - s}{a}\right] \tag{8.62}$$

每一花瓣上ds的质量为

$$dm_{瓣} = \frac{2\pi\rho_t h_t s ds}{n} \tag{8.63}$$

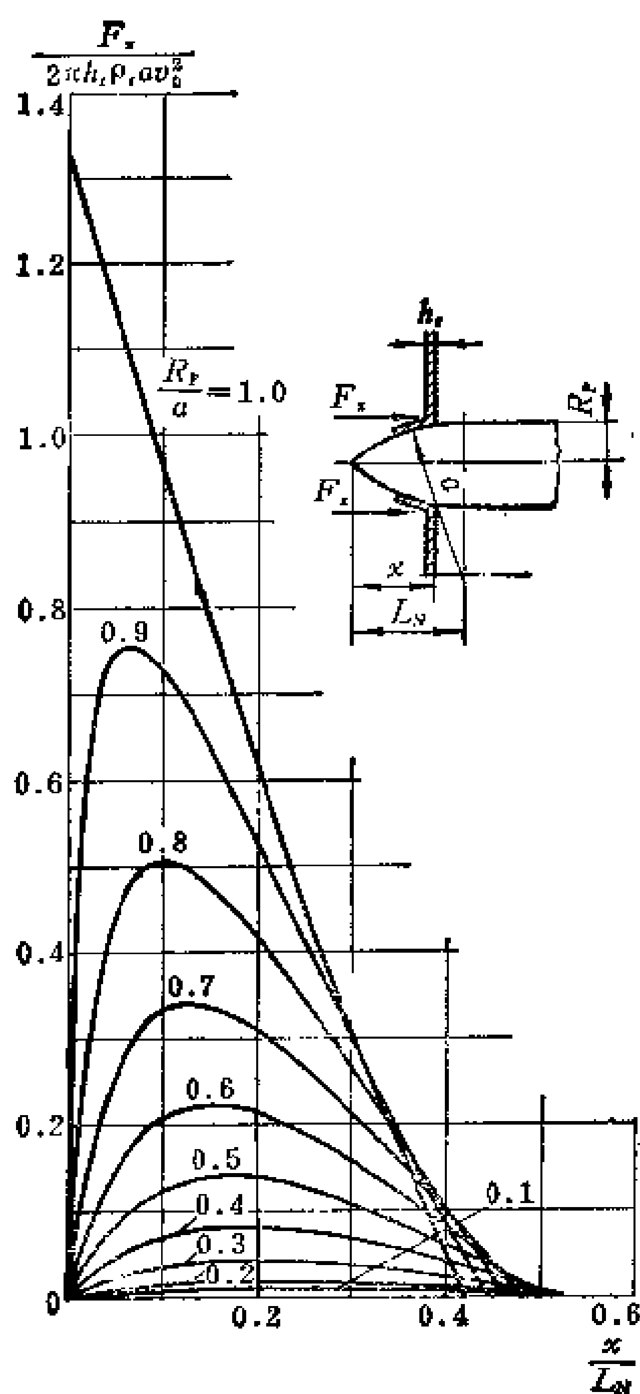


图8-12　轴向合力和弹体侵入位移的关系

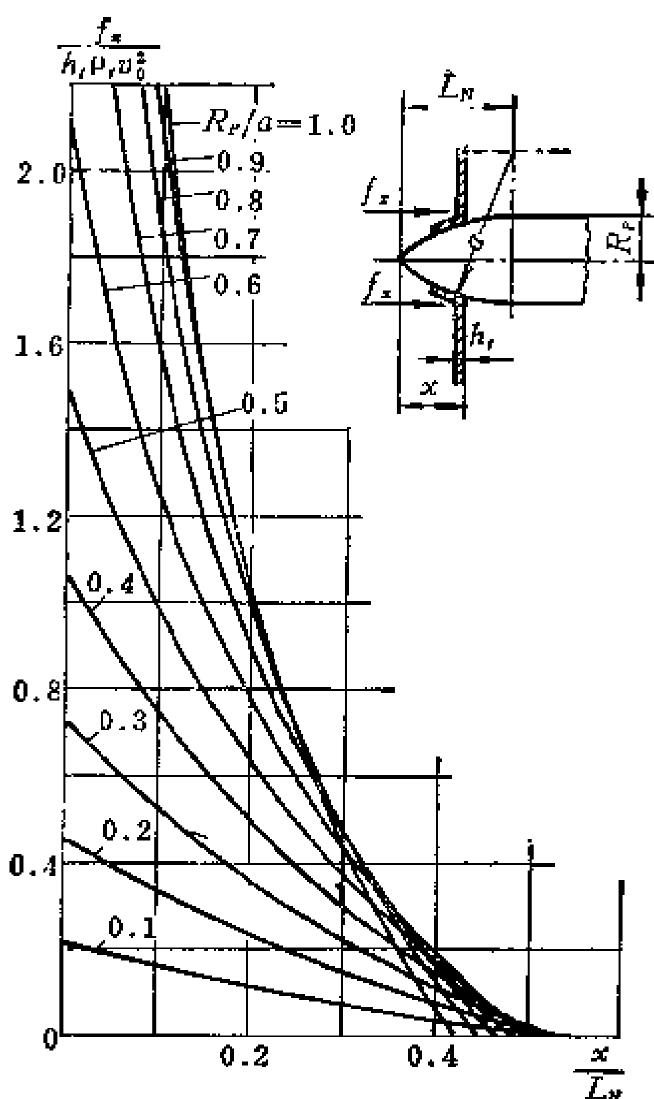


图8-13　弹孔周界单位长度所受轴向力和弹体侵入位移的关系

于是，在用了式（8.62）、（8.63）后，每一花瓣的总径向动量为

$$M_r = \frac{2\pi\rho_t h_t v y^2}{n}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx}\left[1-\frac{L_N - x}{a}\right]+\frac{y}{6a}\right\} \tag{8.64}$$

每一花瓣所受径向力为

$$F_r = v\frac{dM_r}{dx} \tag{8.65}$$

如果把（8.64）式写成

$$M_r = vf(x) \tag{8.66}$$

而且设$\Delta v \ll v$，则近似地有

$$\frac{dM_r}{dx}=v_0\frac{df(x)}{dx} \tag{8.67}$$

最后，可以证明

$$\frac{nF_r}{2\pi\rho_t h_t a v_0^2}=\left(\frac{y}{a}\right)^2\left[\tan\theta-\frac{1-\sin\theta}{2\cos^3\theta}\right]$$

$$+\frac{y}{a}\tan^2\theta(1-\sin\theta) \tag{8.68}$$

在弹孔边界上单位长度所受径向力为

$$f_r=\frac{nF_r}{2\pi y} \tag{8.69}$$

于是，从式（8.58）、（8.68）、（8.69），得

$$\frac{f_r}{\rho_t h_t v_0^2}=c_5+c_4\frac{R_p}{a} \tag{8.70}$$

其中

$$c_3=\tan^2\theta(1-\sin\theta) \tag{8.71a}$$

$$c_4=\tan\theta-\frac{1-\sin\theta}{2\cos^3\theta} \tag{8.71b}$$

$$c_5=c_3-(1-\cos\theta)c_4 \tag{8.71c}$$

图8-14为单位长度的弹孔边缘上所受径向力 f_r和 R_p/a 的关系。弹孔边缘单位长度上的合力为

$$f=\sqrt{f_x^2+f_r^2} \tag{8.72}$$

这个合力通过弹体和花瓣的接触圈，其指向为

$$\tan\alpha=\frac{f_r}{f_x} \tag{8.73}$$

式(8.72)和（8.73）的结果见图8-15和图8-16。

实验结果证明，只要接击速度足够高，大概 $v_0>300$米/秒，花瓣型击穿的理论结果就很接近实验结果。换句话说，花瓣的动量所做的功，在这时是主要成分，塑性变形功是可以略去的。

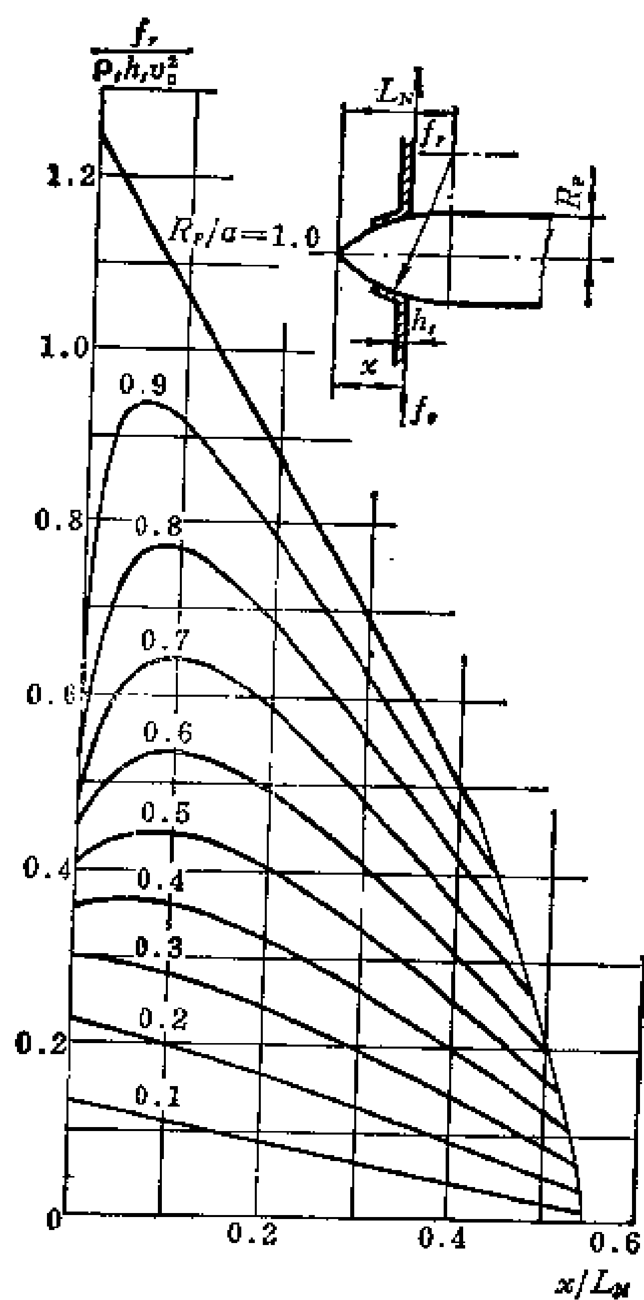


图8-14　弹孔边缘单位长度所受径向力f_r和x/L_N的关系

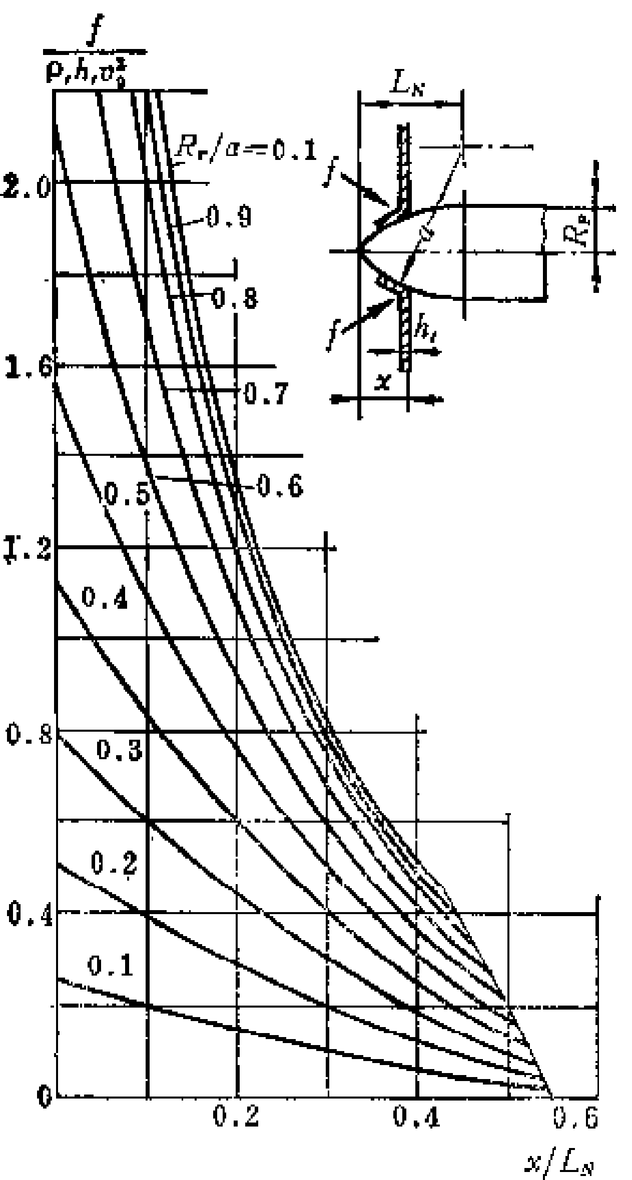


图8-15　弹孔边缘单位长度所受合力 f 和 x/L_N 的关系

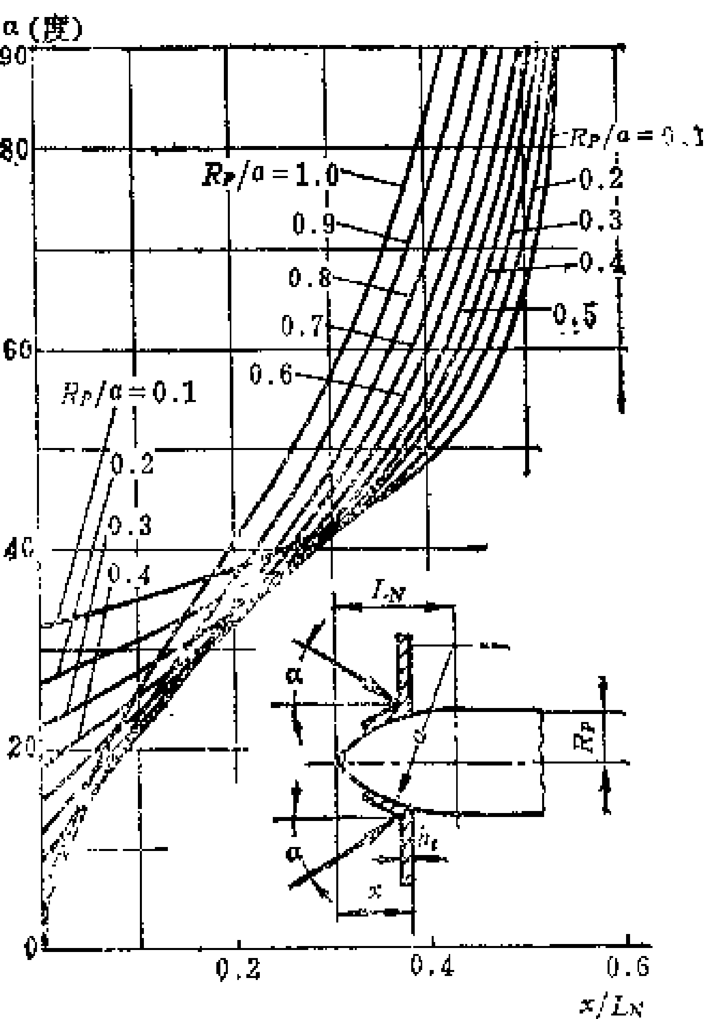


图8-16　弹孔边缘上受力的方向 α 和 x/L_N 的关系

§8.4 穿越靶板时的复合抗力函数模式

当尖头弹体穿越靶板时，如果有比较简单的模式来描写弹体在各点所经受的抗力，把抗力写成弹体位移和运动速度的函数，则弹体击穿靶板过程中的速度损失就能通过积分牛顿运动方程求得。

在历史上有许多复合抗力函数的公式。例如下列公式按次序每一项代表一个方面，共有四项代表四个方面的抗力：

（1）靶板对弹体的接触静压的抗力。

（2）靶板的翻转变形，产生了新的接触表面面积，和表面张力一样，同样产生了扩孔抗力。

（3）靶板翻转运动的惯性力。

（4）靶板的摩擦阻力，它既和位移有关，也和位移速度有关。

用图8-2c的记号，我们有轴向运动的复合抗力$F(x)$，

$$
\begin{aligned}
F(x)=&\pi p_1[r^2(x)-r^2(x-h)]\\
&+\pi p_2\int_{x-h}^{x} r(x)\left[\frac{dr(x)}{dx}\right]^2 dx\\
&+\frac{4\pi h_t \rho_t R_P^2 v^2}{3\left(R_P+\frac{1}{2}L_N\right)^2}x\left(L_N+\frac{1}{2}h-x\right)\\
&+\pi f\{p_1[J(x-h)-J(x)]\\
&+p_2[r^2(x)-r^2(x-h)]\}
\end{aligned}
\tag{8.74}
$$

其中

$$
J(x)=\begin{cases} 2\int_{x}^{L_P} r(x)dx, & 对\ x\leqslant L_P \\ 0, & 对\ x>L_P \end{cases} \tag{8.75}
$$

而L_P为弹体整体总长度，

$$r(x)=0,\quad 对\ x\leqslant 0 \tag{8.76a}$$

$$r(x)=R_P,\quad 对\ L_N\leqslant x<L_P \tag{8.76b}$$

这里用了两个和材料有关的动力系数

$$p_1 = p_H\left(1 + \frac{1}{4}\tan\beta\right)^{1/2} \qquad (8.77)$$

其中p_H为流体静压，p_2为翻转变形抗力系数，它的性质和表面张力的性质一样。翻转变形中，和弹体的接触面积增加，从而靶板增加了新的表面面积（一块靶板有两个表面，所谈新增加表面面积，等于新增加接触面积的两倍）。每新增一个表面面积所产生的轴向力称为p_2。还有f是摩擦系数。

所有接触压力的动力系数，在运动过程中并不是常数，但为了方便，我们把他们都看作是常数。对于流体静压而言，作为常数看待还是比较合理的。对于翻转变形产生的压力系数p_2就不是这样，因为它在花瓣区域就完全等于零。在第一项的推导中也还用了一些平均的近似算法。

所有这些种类的力，其实还不是作用在弹体上的全部力。例如，我们还没有考虑弹体的变形、靶板的盘形弯曲变形、花瓣逸出的效应。而且塑性变形的一切影响。在考虑第三项时，人们假定靶板材料的平均速度只有弹体速度的$\frac{1}{3}$，这是虚质量概念所派生的。这一点可能是有些道理的，因为如果弹体的速度是1000米/秒左右时，靶体获得的功能大概约为原有弹体动能的5～10%，人们对于这个理论，有种种认为它是不合理的攻击。但是，这种复合抗力的模型，对于钢弹撞击装甲板而言，不论是正击还是斜击，都能和实测结果连系起来，而且理论和实验结果很一致。也许因为这里有三个可以调节的材料常数，即p_1，p_2，f，就能有较大的适应性。有不少理论上的基本错误概念所引起的误差，是从调整p_1、p_2、f这三个数来平均掉的。

对于这个问题，后来人们试图采用独立的实验，分别测定p_1、p_2两个材料系数，然后用调节f来满足射击试验所得实测结果。这样就使复合抗力的理论有了较好的基础。但是，迄今为止，人们对于这个模型，还是不很信任。在第二次大战结束以后，法德军备研究中心曾提出了一种微分形式的复合抗力[8-8,8-9]。

$$
\begin{aligned}
dF &= dF_c + dF_k + dF_F + dF_G \\
&= \{b_1 \pi r \sigma_{YT} \tan\Phi \sqrt{1+\sec^2\Phi}\}\,dx \\
&\quad + \Big\{2\pi e_{Ut} \tan\Phi \sec^2\Phi (\cos\Phi - rK) + 4b_2 \rho_t r \tan\Phi \\
&\quad \times \Big[r \tan\Phi \dot{v} + \Big(\tan^2\Phi - \frac{rK}{\cos^3\Phi}\Big) v\Big]\Big\} \\
&\quad \times \Big\{1 + \frac{\sin\zeta_F}{\sin\Phi\cos(\Phi+\zeta_F)}\Big\} dx
\end{aligned}
\tag{8.78}
$$

其中Φ为卵形弹头上当地斜度，K为曲率，即

$$
\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{dr}{dx}\right) \tag{8.78a}
$$

$$
K = -\cos\Phi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) \tag{8.78b}
$$

而且$r(x)$为当地半径，e_{Ut}是靶板的比表面能，ζ_F是摩擦角，常数$b_1 \approx 1$，$b_2 \approx 2.5$。当速度提高而温度升高时，ζ_F是急速降低的。摩擦总力根据克赖夫脱[8-10]的测定，一般只占总复合力的3%。有关靶板翻转变形所产生的抗力也是可以略去的。这个模式〔包括（8.74）式所代表的模式〕的弹道极限速度v_{50}为

$$
v_{50} = \frac{2\pi R_p^2 h_t\Big\{p_1\Big[1 + f\frac{J(0)}{R_p^2}\Big] + p_2\Big[2\int_0^{L_N} r(x)\Big(\frac{dr(x)}{dx}\Big)^2 dx + f\Big]\Big\}}{m - \pi h_t \rho_t R_p^2/g} \tag{8.79}
$$

另一种复合抗力的模式是早期法国火炮研究所使用的，它也适用于较厚的靶板。它只考虑了靶板的惯性抗力和靶体塑性成坑的阻力。他们使用布氏硬度数BHN来表示塑性成坑的阻力。如果弹头运动位移为x，速度为v时，作用在弹体上的抗力为

$$
F = \pi r^2\Big\{6\mathrm{BHN}\Big(1 - \frac{x}{h_t}\Big)^2 - 4\mathrm{BHN}\Big(1 - \frac{x}{h_t}\Big) + \rho_t v^2\Big\} \tag{8.80}
$$

有不少弹体抗力公式，是和邦锡莱[8-18]的经验公式有相同形式，而且每一项都可以找到有关的机理。

也有人[8-14]建议用每一单位接触面积的微分抗力来表示这种抗力，对于铝板而言，考虑了静抗阻和靶体的虚质量效应后，可以把微分抗力表示为

$$\frac{dF}{dA}=[\bar{p}_\pi+\rho_t v^2\sin^2\beta]\sin\beta \tag{8.81}$$

其中 β 为靶体表面的当地斜度。$\bar{p}_\pi$ 是平均接触静压，其大小恰好足够击穿靶体，对于铝靶板而言，实验测定为

$$\bar{p}_\pi=5.29h_t(\text{MPa})(h_t\text{ 以毫米计}) \tag{8.82}$$

这个数值有可能可以从很慢运动的压头所形成的平均压力求得，它可以利用本题的滑移线解，其值约为 $\bar{p}_\pi\approx 3\sigma_{YT}$[8-15]。(8.81)式可以分三个阶段对锥形弹头的弹体积分：

（1）开始钻透的阶段，$0<x<h_t$；

（2）部分挤进的阶段，$h_t<x<L_N$；

（3）弹孔完全形成的阶段，$L_N<x<L_N+h$。

对于锥形弹头而言：

（1）在 $0<x<h_t$，有（设 $\Delta v\ll v$）

$$F=\int_0^x[\bar{p}_\pi+\rho_t v^2\sin^2\beta]2\pi\tan^2\beta x dx$$
$$=(\bar{p}_\pi+\rho_t v^2\sin^2\beta)\pi\tan^2\beta x^2 \tag{8.83a}$$

（2）在 $h_t<x<L_N$，有（设 $\Delta v\ll v$）

$$F=\int_{x-h}^x[\bar{p}_\pi+\rho_t v^2\sin^2\beta]2\pi\tan^2\beta x dx$$
$$=(\bar{p}_\pi+\rho_t v^2\sin^2\beta)\pi\tan^2\beta(2xh_t-h_t^2) \tag{8.83b}$$

（3）在 $L_N<x<L_N+h_t$，有（设 $\Delta v\ll v$）

$$F=\int_{x-h_t}^{L_N}[\bar{p}_\pi+\rho_t v^2\sin\beta]2\pi\tan^2\beta x dx$$
$$=(\bar{p}_\pi+\rho_t v^2\sin^2\beta)\pi\tan^2\beta[L_N^2-(x-h_t)^2] \tag{8.83c}$$

如果称

$$\psi(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<h_t\\ 2xh_t-h_t^2, & h_t<x<L_N\\ L_N-(x-h_t)^2, & L_N<x<L_N+h_t\end{cases} \tag{8.84}$$

则图 8-17 为 $\psi(x)$ 函数的图示。于是牛顿运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{dx}=F=(\bar{p}_{\pi}+\rho_{t}v^{2}\sin^{2}\beta)\pi\tan^{2}\beta\psi(x)\tag{8.85}$$

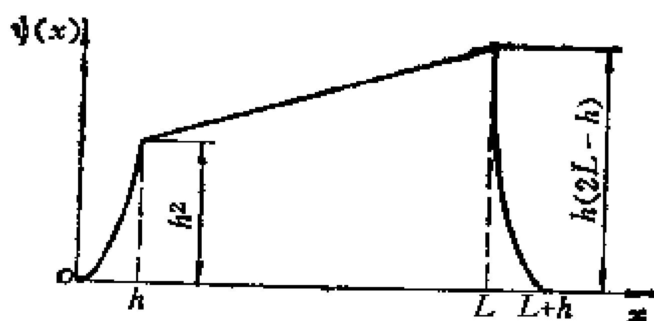


图8-17　ψ(x)函数的图示

(8.85) 式可以改写为

$$\frac{dv^{2}}{(\bar{p}_{\pi}+\rho_{t}v^{2}\sin^{2}\beta)}=\frac{2\pi\tan^{2}\beta}{m}\psi(x)dx$$

积分得

$$\frac{1}{\rho_{t}\sin^{2}\beta}\ln\left[\bar{p}_{\pi}+\rho_{t}v^{2}\sin^{2}\beta\right]=\frac{2\pi\tan^{2}\beta}{m}\int_{0}^{x}\psi(x)dx+C_{1}\tag{8.86}$$

积分常数 C_1 用起始条件 $x=0$ 时 $v=v_0$ 决定为

$$C_{1}=\frac{1}{\rho_{t}\sin^{2}\beta}\ln(\bar{p}_{\pi}+\rho_{t}v_{0}^{2}\sin^{2}\beta)\tag{8.87}$$

于是，把 C_1 从 (8.87) 代入 (8.86)，整理后得

$$v^{2}=-\frac{\bar{p}_{\pi}}{\rho_{t}\sin^{2}\beta}+\left(\frac{\bar{p}_{\pi}}{\rho_{t}\sin^{2}\beta}+v_{0}^{2}\right)e^{\frac{2\rho_{t}\pi}{m}\tan^{2}\beta\sin^{2}\beta\int_{0}^{x}\psi(x)dx}\tag{8.88}$$

弹道末端速度 v_f 为 $x=L_N+h_t$ 的 v 值，我们通过积分求得

$$\int_0^{L_N+h_t} \psi(x)dx = \int_0^{h_t} x^2 dx + \int_{h_t}^{L_N} (2xh_t - h_t^2)dx$$

$$+ \int_{L_N}^{L_N+h_t} [L_N^2 - (x - h_t)^2]dx$$

$$= L_N h_t (2h_t - L_N) \approx L_N^2 h_t$$

$$= - R_p^2 h_t \frac{1}{\tan^2\beta} \tag{8.89}$$

于是，得

$$v_t = e^{-\frac{2\pi\rho_t h_t R_p^2}{m}\sin^2\beta} \left\{ v_0^2 - \frac{\bar{p}_x}{\rho_t \sin^2\beta} \left[e^{\frac{2\pi\rho_t h_t R_p^2}{m}\sin^2\beta} - 1 \right] \right\} \tag{8.90}$$

实验指出，击穿时，弹体变形有时较严重，靶板有时有凿块飞离；这样（8.90）就不十分正确。但对于弹体变形不很严重时，(8.90)和实验吻合很好[8-14]。晚近[8-16]有较多实验数据证实了上述结果。从（8.90），我们可以求得弹道极限速度

$$v_{B0} = \frac{\bar{p}_x}{\rho_t \sin^2\beta} \left\{ e^{\frac{2\pi\rho_t h_t R_p^2}{m}\sin^2\beta} - 1 \right\} \tag{8.91}$$

§8.5 变形弹体单一挤凿机理的弹塑性流体动力学理论

弹体变形会引起较为复杂的情况。弹体的变形还会使运动也发生变化。为了弄清这种情况的击穿过程，我们既可以先假设弹体可能产生某种约定变形，也可以把弹体和靶体的位移和变形协调起来进行研究。

最简单的单一挤凿机理是把靶板看作为厚为 h_t 的具有弹塑性流体动力学性质的材料，把弹体看作是长度随着时间变化着的圆柱体，它们在弹道极限速度以上，同时又在 1200米/秒 以下的速度进行撞击[8-17]。在撞击一开始，接触面上形成了很高的接触压

强，从而在那里造成了流态区域。

现在让我们根据霍泼金斯-柯尔斯基础撞理论（§1.4）导出接触面的运度速度和接触应力。在撞击开始时，弹体、靶体的接触表面的运动速度为 v_1，接触应力(压应力)为 σ_e，

$$\sigma_e = \rho_t c_{Ht} v_1 = \rho c_{HP}(v_0 - v_1) = \frac{\rho_t c_{Ht} \rho_P c_{HP}}{\rho_t c_{Ht} + \rho_P c_{HP}} v_0 \tag{8.92a}$$

$$v_1 = \frac{\rho_P c_{HP}}{\rho_t c_{Ht} + \rho_P c_{HP}} v_0 \tag{8.92b}$$

其中 v_0 为弹体的撞击速度，c_{Ht}，c_{HP} 为靶体和弹体中的流体力学声速。这个压应力在靶体内以速度 c_{Ht} 向前传播，在到达靶板的背面后再反射回来，当在回传的途中遇见向前运动的弹体时，所耗时间为 $t_e \approx \frac{2h_t}{c_{Ht}+v_1}$。当这个压力波传回弹体表面后，接触面上的压应力瞬时变为零，在 t_e 内，这个接触面一共前进了 $\delta_e \approx v_1 t_e = \frac{2h_t v_1}{c_{Ht}+v_1}$。所以，接触压应力是一个阶梯函数

$$p = \sigma_e,\ 当\ 0 < t < t_e \tag{8.93a}$$

$$p = 0,\ 当\ t_e < t < t_f \tag{8.93b}$$

其中 t_f 为击穿结束的时间。除了这个撞击的接触应力外，在接触面上还有一个和挤凿剪应力平衡的压应力 σ_1（图 8-18）。在以 R_P 为半径的靶块柱形截面上，有剪应力 σ_{xr} 作用。它的强度在 $x^* = x$ 处是屈服剪应力。在背面上（$x^* = h_t$），它等于零。设其间是直线分布的（图 8-18*b*），于是 σ_1 和 σ_{xr} 平衡时，

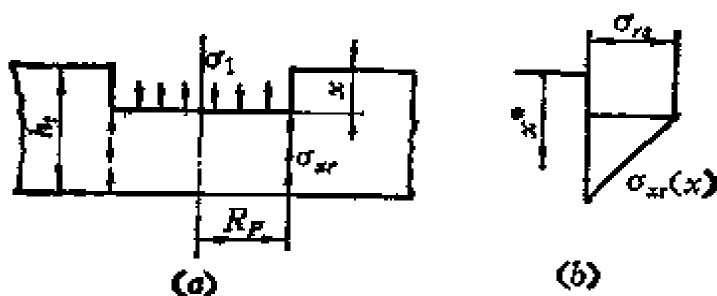


图8-18　待凿靶块的平衡

（*a*）靶块的平衡；（*b*）剪应力的分布。

$$\pi R_p^2\sigma_1=2\pi R_p\int_x^{h_t}\sigma_{xr}dx=\pi R_p\sigma_Y(h_t-x) \tag{8.94a}$$

或得

$$\sigma_1=\sigma_{YS}\frac{h_t-x}{R_p},\quad 0<t<t_f \tag{8.94b}$$

这对于 t 从开始到破坏（凿穿）时（t_f）都是适用的。于是，弹体的运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=-\pi R_p^2(p+\sigma_1)=-\pi R_p^2 p-\pi R_p\sigma_{YS}(h_t-x) \tag{8.95}$$

其中 p 为接触应力，见（8.93），而 m 为弹体的质量

$$m=\pi R_p^2 L\rho_p \tag{8.96}$$

这里的 L 并不是一个常量，因为 $\frac{dL}{dt}=-(v-v_1)\approx-(v_0-v_1)$，所以积分得

$$L=L_D-(v_0-v_1)t \tag{8.97}$$

（8.95）在（8.96）、（8.97）的条件下，是可以积分的，其积分条件为

$$\left.\begin{aligned}x=0,\quad v=v_0,\quad t=0\\ x=h,\quad v=v_f,\quad t=t_f\end{aligned}\right\} \tag{8.98}$$

积分后就得到了 v_f 的公式。

当然，我们也可以把 L 当作常量来积分。在 $0<t<t_e$ 中，$p=\sigma_e$，于是（8.95）可以写成

$$m\frac{dv}{dt}=-\pi R_p^2\sigma_e-\pi R_p\sigma_{YS}h_t+\pi R_p\sigma_{YS}x,\quad 0<t<t_e \tag{8.99a}$$

把 $\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$ 代入，上式可以写成

$$\frac{1}{2}mdv^2=(-\pi R_p^2\sigma_e-\pi R_p\sigma_{YS}h_t+\pi R_p\sigma_{YS}x)dx\quad 0<t<t_e \tag{8.99b}$$

积分得

$$\frac{1}{2}mv^2=(-\pi R_P^2\sigma_a-\pi R_P\sigma_{YS}h_t)x+\frac{1}{2}\pi R_P\sigma_{YS}x^2+c_1\quad 0<t<t_e\quad(8.100)$$

积分常数 c_1 可以用起始条件 $x=0$，$v=v_0$ 决定，于是 $c_1=\frac{1}{2}mv_0^2$，所以有

$$\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=-\pi R_P(R_P\sigma_e+\sigma_{YS}h_t)x+\frac{1}{2}\pi R_P\sigma_{YS}x^2\quad 0\leqslant t\leqslant t_e\quad(8.101)$$

当 $x=\delta_e=\frac{2h_tv_1}{c_{Ht}+v_1}$，$v$ 为 v_e

$$v_e^2=v_0^2-\frac{4\pi R_P}{m}\frac{h_tv_1}{c_{Ht}+v_1}\left\{(R_P\sigma_e+\sigma_{YS}h_t)-\sigma_{YS}\frac{hv_1}{c_{Ht}+v_1}\right\}\quad(8.102)$$

从这时以后，$p=0$，运动方程（8.99a）应该写成

$$\frac{1}{2}mdv^2=(\sigma_{YS}x-\sigma_{YS}h_t)\pi R_Pdx,\quad t_e\leqslant t\leqslant t_f\quad(8.103)$$

积分得

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\pi R_P(\sigma_{YS}x^2-2\sigma_{YS}h_tx)+c_2,\quad t_e\leqslant t\leqslant t_f\quad(8.104)$$

c_2 是由 $t=t_e$ 时，$v=v_e$，$x=\delta_e$ 所决定的

$$c_2=\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{2\pi R_Ph_tv_1}{(c_{Ht}+v_1)}\left\{\frac{h_tv_1}{c_{Ht}+v_1}-h_t\right\}\sigma_{YS}\quad(8.105)$$

而（8.104）可以写成

$$v^2=v_e^2-\frac{4\pi R_Ph_tv_1}{m(c_{Ht}+v_1)}\left\{\frac{h_tv_1}{c_{Ht}+v_1}-h_t\right\}\sigma_{YS}+\frac{\pi R_P\sigma_{YS}}{m}(x-2h_t)x\quad(8.106)$$

当 $x=h_t$ 时，$v=v_t$＝弹体的剩余速度，并用（8.102）消去 v_e^2，得

$$v_f^2=v_0^2-\frac{4\pi R_p h_t v_1 R_p \sigma_e}{(c_{Ht}+v_1)m}-\frac{\pi R_p \sigma_{YS}}{m}h_t^2 \tag{8.107}$$

把（8.92）中的 v_1，σ_e 代入上式，还有用(8.96)中的 m，(8.107)可以写成

$$v_f^2=v_0^2\left\{1-\frac{4\rho_t c_{Ht} c_{HP} h_t}{L(\rho_t c_{Ht}+\rho_p c_{HP})\left(c_{Ht}+\dfrac{c_P c_{HP} v_{50}}{\rho_t c_{Ht}+\rho_p c_{HP}}\right)}\right\}$$

$$-\frac{\sigma_{YS} h_t^2}{\rho_p L R_p} \tag{8.108}$$

当 v_f 为零时，v_0 即为弹道极限速度 v_{50}。所以

$$v_{50}^2=\frac{\sigma_{YS} h_t^2}{\rho_p L R_p}\frac{1}{\left\{1-\dfrac{4\rho_t c_{Ht} c_{HP} h_t}{L(\rho_t c_{Ht}+\rho_p c_{HP})\left(c_{Ht}+\dfrac{c_P c_{HP} v_{50}}{\rho_t c_{Ht}+\rho_p c_{HP}}\right)}\right\}} \tag{8.109}$$

末端速度也可以写成

$$v_f=h_t\sqrt{\frac{\sigma_{YS}}{\rho_p L R_p}\left(\frac{v_0^2}{v_{50}^2}-1\right)} \tag{8.110}$$

§8.6 变形弹体多阶段挤凿机理的塑性力学理论(1974)[8-18]

本节所述既适用于薄靶板也适用于中厚靶板。它把挤凿过程分为三个阶段（见图 8-19)。第一阶段为弹体压入靶板形成弹坑。第二阶段弹体继续压缩靶板，待凿靶块所受的剪切力增加，一直到弹体和待凿靶块以相同速度前进。第三阶段从弹体靶块获得相同速度时开始，一直到靶块凿离弹孔为至。在这个阶段中，压缩停止，只有剪应力起作用。所有摩阻、发热、板的弯曲和波的传播等都略去不计。

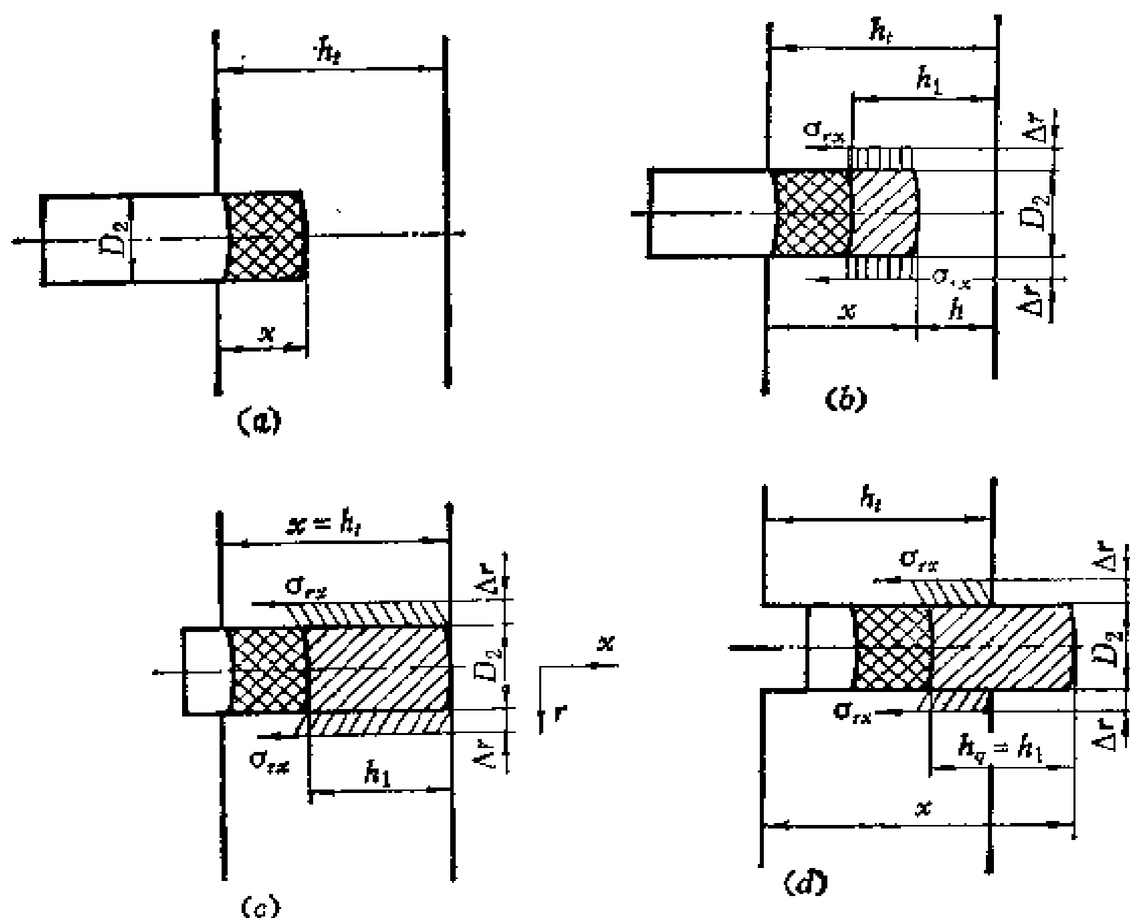


图8-19　击穿过程的三个阶段

（a）第一阶段；（b）第二阶段；（c）第二阶段结束；（d）第三阶段。

第一阶段　在弹头前方的靶板材料被压缩到破坏压缩应力σ_{UC}，靶板材料一部分从弹体的运动中获得了动量。运动方程可以写成：

$$F_1(t)=-\frac{1}{2}c_1\rho_t A_P v^2-\sigma_{UC}A_P=\rho_t A_P v^2+(m+\rho_t Ax)\,v\frac{dv}{dx},$$

$$0\leqslant x\leqslant h_t-h_1 \qquad (8.111)$$

其中m为弹体质量；A_P为弹体截面面积；h_t为靶板厚度；h_1为剩余的待击穿的厚度，它实际上是将来被凿出的靶块的厚度$(h_1\approx h_q)$；c_1为与弹头形状有关的一个常数，它和薄板的虚质量也是有关的，它的值对球形弹头、柱形弹头和锥形弹头而言，分

别为 $\frac{1}{2}$、1 和 $\cos^2\beta$。由于弹头在碰撞中的变形，其撞击面一般呈现平面情况，或接近平面形状。因此，c_1 取 1，更接近于实际。

在这一阶段内，积分（8.111）式，并用初始条件 $v=v_0$，$x=0$ 得

$$v^2=\left(v_0^2+\frac{2\sigma_{UC}}{\rho_t(2+c_1)}\right)\left[\frac{m_0}{m_0+\rho_t A_p x}\right]^{2+c_1}-\frac{2\sigma_{UC}}{\rho_t(2+c_1)}$$

$$0\leqslant x\leqslant h_t-h_1 \tag{8.112}$$

再进一步积分，用初始条件 $t=0$，$x=0$，求得位移 x 和时间 t 的关系

$$t(x)=\int_0^x\left\{\left(v_0^2+\frac{2\sigma_{UC}}{\rho_t(2+c_1)}\right)\left[\frac{m_0}{m_0+\rho_t A_p x_1}\right]^{2+c_1}-\frac{2\sigma_{UC}}{\rho_t(2+c_1)}\right\}^{-1/2}dx \tag{8.113}$$

（8.111）的弹体受阻力的历史，可以用数值积分，从（8.113）、（8.111）求得。

第二阶段　在这一阶段内，惯性力、压缩力和剪应力同时起作用。惯性力作用在凿块截面 A_q 上，在不少情况下，A_q 和弹体截面 A_p 相等。如果凿块的根部直径变化很大，则凿块的截面直径 D 可以假定是 x 的线性函数。c_1 选用 0.5。因为除了穿甲弹外，其它弹体在击穿后都呈现球面形状。在第一阶段结束时，我们发现力 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 基本上是连续的，其不连续性很小。压缩力 $\sigma_U A_q$ 在第二阶段结束时减小到零，其变化假定是抛物线型的。剪应力可以根据宾汉（Bingham）型本构方程决定。

$$\sigma_{rx}=\sigma_{YS}^{D}+\mu\frac{\partial v}{\partial r}=\sigma_{YS}^{D}+\mu\frac{v}{\Delta r} \tag{8.114}$$

其中 Δr 是剪应力区的宽度，有时称为“径向余隙”。μ 是高速变形的材料特性，可以从实验来测定[8-19,8-20]。第二阶段的运动方程为

$$F_2(t)=-\frac{1}{2}c_1\rho_t A_q v^2-\left(\sigma_{YS}^D+\mu\frac{v}{\Delta r}\right)\pi D_2$$

$$\times[x-(h_t-h_1)]-\sigma_{UC}A_q\left\{1-\left[\frac{x-(h_t-h_1)}{h_1{}^2}\right]^2\right\}$$

$$=A_t A_q v^2+(m_0+\rho_t A_q x)v\frac{dv}{dx}\tag{8.115}$$

也可以写成

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{(m_0+\rho_t A_q x)v}\left\{-\left(1+\frac{1}{2}c_1\right)\rho_t A_q v^2\right.$$

$$-\sigma_{YS}^D\pi D_2 x-\frac{\mu\pi D_2 vx}{\Delta r}+\frac{\mu\pi D_2(h_t-h_1)v}{\Delta r}$$

$$\left.+\sigma_{YS}^D\pi D_2(h_t-h_1)-\sigma_{UC}A_q\left[1-\left(\frac{x-h_0+h_1}{h_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$\tag{8.116}$$

在第一阶段结束时的有效质量为

$$m_{e1}=m_0+\rho_t A_1(h_t-h_1)\tag{8.117}$$

第二阶段历经的时间为

$$t_2=\int_{h_t-h_1}^{h_t}\frac{1}{v}dx\tag{8.118}$$

第三阶段　在这一阶段内，弹体和凿块的总质量为 m_{e2}，它是常数。

$$m_{e2}=m_0+\rho_t\overline{A}h_t\tag{8.119}$$

它运动时，只受面积 A_q^* 上的剪应力作用。第三阶段的运动方程为

$$m_{e2}\frac{d^2x^*}{dt^2}=F_3(t)=-\sigma_{rz}A_q^*=-\left(\sigma_{YS}^D+\mu\frac{v}{\Delta_r}\right)A_q^*$$

$$\tag{8.120}$$

其中 $x^*=x-h_1$，$A_q^*=\pi\overline{D}_2(h_t-x^*)$，于是

$$m_{e2}\frac{d^2x^*}{dt^2}=-(\sigma_{YS}^D+\mu\frac{v}{\Delta r})\pi\overline{D}_2(h_t-x^*)\tag{8.121}$$

$$v=\frac{dx^*}{dt}\tag{8.122}$$

或可写成

$$m_{t2}\frac{dv}{dt}=-\pi\overline{D}_2\left(\sigma_{YS}^D+\mu\frac{v}{\Delta r}\right)(h_t-x^*) \tag{8.123}$$

其起始条件为

$$x^*=h_t-h_1,\quad v=v_{2f},\quad t=t_2 \tag{8.124}$$

v_{2f} 是第二阶段末尾的速度。(8.123) 在 (8.124) 的条件下可以用数值积分法求得其解。

把 $\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx^*}$ 代入 (8.123)，进行积分，得

$$v-\frac{\Delta r}{\mu}\sigma_{YS}^D\ln\left(\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}+v\right)=\frac{\pi\overline{D}_2\mu}{2m_{t2}\Delta r}(h_t-x^*)^2+c_3 \tag{8.125}$$

用第三阶段的起始条件，$x^*=h_t-h_1$，v 等于第二阶段结束时的速度 v_{2f}，所以

$$v_{2f}-\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}\ln\left(\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}+v_{2f}\right)=\frac{\pi\overline{D}_2\mu}{2m_t\Delta r}h_1^2+c_3 \tag{8.126}$$

于是 (8.125) 可以写成

$$v-v_{2f}-\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}\ln\left[\frac{\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}+v}{\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}+v_{2f}}\right]$$

$$=\frac{\pi\overline{D}_2\mu}{2m_t\Delta r}[(h_t-x^*)^2-h_t] \tag{8.126a}$$

第三阶段结束时，$v=v_f$，$x^*=h_t$；代入 (8.126a)，得

$$v_f-v_{2f}-\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}\ln\left[\frac{\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}+v_f}{\sigma_{YS}^D\frac{\Delta r}{\mu}+v_{2f}}\right]=\frac{\pi\overline{D}_2\mu}{2m_t\Delta r}h_t^2 \tag{8.126b}$$

这是决定 v_f 的方程式。

一直到 t_3 时，$x^*=h_t$。但从此以后，还有 L_P-h_1 一段距离要走完才算离开了靶板，其运动速度为 v_f，所需时间为 $(L_1-h_1)/v_f$。总时间为

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \frac{L_P - h_1}{v_f} \tag{8.129c}$$

其中 L_P 为弹体长度

图 8-20 为一个典型计算的结果。μ 是从弹道试验中求得的。而 Δr 和 $\bar{D}_2$ 则是测得的。$\bar{D}_2$ 近似等于 D_2 和 D_q 的平均值，其中 D_2 为第一阶段的靶块直径，D_q 为被凿离的靶块直径。从实验证明 $\bar{D}_2/h_2$ 和 h_2/h_t 在整个范围内近似地为常数。在早期[8-18,8-21,8-22,8-23]，人们只用第一和第三两个阶段，这样弹体所受力在时间 t_1 时，有一突然的降落，然后再渐渐减小，以至于零。

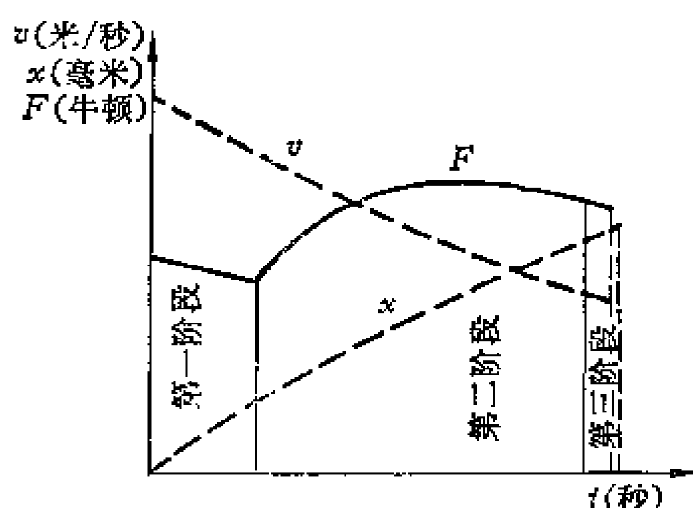


图8-20　三阶段击穿的计算结果（用400米/秒速度的5.59毫米直径铅弹射击50毫米厚的铝靶板）

§8.7　分为单纯压缩和没有压缩的两个阶段的弹塑性挤凿理论

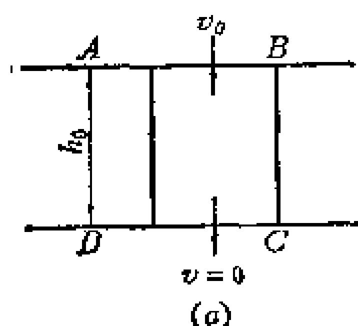
澳大利亚的吴德瓦德（R. L. Woodward）-墨登（M. E. de Morton）在晚近(1976)[8-24]提出了一种两个阶段的挤凿理论。下文所述乃本书作者在吴-墨理论基础上的发展，其内容尚未发表过。

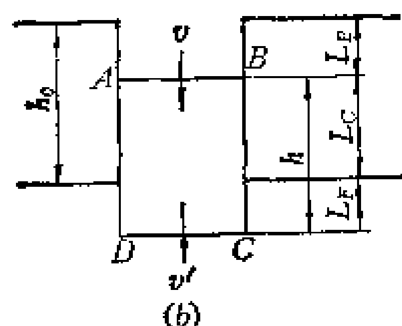
第一阶段（靶块压缩阶段）

设靶块在接触开始时的撞击面 AB 的初速度为 v_0，背面 CD 的初速度为 0（图 8-21）。在以后一段时间内，靶块受了均匀压

缩，AB 面的速度逐步减小，CD 面的速度逐步增加，最后在某一时刻 t_1 时 AB 面和 CD 面的速度相等，都是 v_1，这时第一阶段结束，靶块不再进一步压缩了。设在 t_1 时，靶块的厚度为 h_1，AB 面位移为 L_{B1}(到达 $A'B'$)，CD 面位移为 L_{F1}(到达了$C'D'$)。于是

$$L_{B1}+h_1=L_{F1}+h_0 \tag{8.127}$$





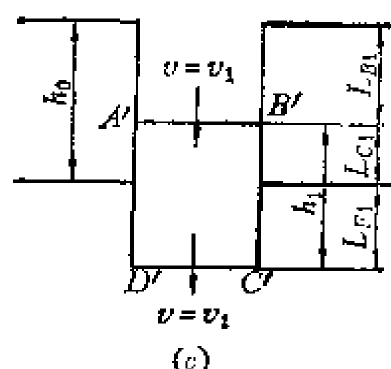


图8-21　第一阶段中靶块的压缩运动

(a) 初始条件 ($t=0$)，$v=v_0$，$v'=0$；(b) 中间过程($0<t<t_1$)，$v>v_0>v'$，$h_1<h<h_0$；(c) 第一阶段结束($t=t_1$)，$v=v'=v_1$。

但是，在 AB 面从 AB 位置到 $A'B'$ 位置的过程中的中面位置时，AB 面的速度 v 和 CD 面的速度 v' 并不相等，一般是 $v>v'$。但(8.127)类型的几何关系仍满足，即

$$L_B+h=L_F+h_0 \tag{8.128}$$

现在让我们研究弹塑性压缩的本构关系，从面建立 AB 面的速度 v 和压缩变形的关系。在弹性范围内的应力应变关系为

$$\sigma=E\varepsilon,\quad \sigma\leqslant\sigma_Y \tag{8.129}$$

E 为杨氏模量，σ_Y 为压缩屈服应力。在超过 σ_Y 后，塑性应力应变关系为

$$\sigma=\sigma_0\epsilon^n,\quad \sigma_Y\leqslant\sigma \tag{8.130}$$

这两个关系在屈服点上应该相同，亦即要求

$$\sigma_Y=\sigma_0\left(\frac{E}{\sigma_0}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{8.131}$$

其中 σ_0 为强度系数，n 为应变硬度指数。σ_0，n 对每一材料都是一个常数。这个塑性关系是材料压缩时，四周没有约束的自由压缩状态的关系，如果有约束，使得它在压缩时，不能向四周膨胀，则应力应变关系曲线就比四周自由的曲线高一些。设其比例为K，这个系数在理论上可以证明是 2，但实际上比 2 要大。象铝这样的材料，实验平均值是 2.7。低碳钢的实验平均值为 3.0。对弹性部分，这个关系不变，但屈服应力，提高为K倍，即 $K\sigma_Y$。于是应力应变关系为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=E\epsilon, && \sigma\leqslant K\sigma_Y\\ &\sigma=K\sigma_0\epsilon^n, && K\sigma_Y\leqslant\sigma\end{aligned}\right\} \tag{8.132}$$

李和托平[8-24]曾用动量守恒定律和应变位移关系证明：传播应力波的速度 c 等于

$$c^2=\frac{1}{\rho}\ \frac{d\sigma}{b\epsilon} \tag{8.133}$$

于是，从（8.132)，有弹性波速

$$c_0^2=\frac{E}{\rho} \tag{8.134a}$$

和塑性波速

$$c_P^2=\frac{K\sigma_0 n}{\rho}\epsilon^{n-1} \tag{8.134b}$$

如果应力业已超过 $K\sigma_Y$，则接触表面 AB 的运动速度为

$$v=\frac{K\sigma_Y}{\rho c_0}+\int_{K\sigma_Y}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\rho c_P} \tag{8.135}$$

本式的证明和（1.4）式的有关讨论相同，只是（1.4）式仅限于弹性范围，

$$v = \frac{K\sigma_Y}{\rho c_0} + \int_{\frac{K\sigma_Y}{E}}^{\epsilon} \frac{Kn\sigma_0\epsilon^{n-1}d\epsilon}{[\rho Kn\sigma_0\epsilon^{n-1}]^{1/2}} \tag{8.136}$$

或等于

$$v = \frac{K\sigma_Y}{\rho c_0} + \left(\frac{Kn\sigma_0}{\rho}\right)^{1/2} \frac{2}{n+1} \left\{ \epsilon^{\frac{n+1}{2}} - \left(\frac{K\sigma_Y}{E}\right)^{\frac{n+1}{2}} \right\} \tag{8.137}$$

本式既可以用来从 ϵ 值计算 v 值，也可以用来从 v 值 计 算 ϵ 值，这是一个重要的关系。

同时，设靶块产生上下一样的均匀压缩，则在大变形下，有

$$h = h_0 e^{-\epsilon} \tag{8.138}$$

在下面我们将通过能量守恒定律，来计算研究这个单纯压缩的过程。这里的推导过程，和吴德瓦德-墨登的推导完全不一样，取消了他们工作中很多的人为假设，现在证明这些人为假设都是多余的。当然，在计算程序上也是很不一样了。

下面让我们计算压缩功 W_{C_1}，靶块获得的功能 W_{K_1}，压缩运动中的剪应力功 W_{S_1}，和下移中不断切割粘接力的滑移摩擦功 W_{F_1}。

设弹体的半径为 R_P。由于均匀压缩 ϵ 而作用在靶块 AB 面上的力为 $\pi R_P^2\sigma$，或为

$$F = \pi R_P^2 K\sigma_0\epsilon^n \tag{8.139}$$

AB 而移动 ΔL_B 所做的功为

$$\Delta W_{C_1} = F\Delta L_B = \pi R_P^2 K\sigma_0\epsilon^n \Delta L_B \tag{8.140}$$

其中 $\epsilon = \epsilon(L_B)$，但这个 L_B 的函数是在计算中逐步确定的。从 0 至 L_B 的功为

$$W_{C_1} = \pi R_P^2 K\sigma_0 \sum_0^{L_B} \epsilon^n \Delta L_B \tag{8.141}$$

靶块在速度 v 时所获得的功能为

$$W_{K_1}=-\frac{1}{2}\pi R_P^2 h v^2 \tag{8.142}$$

其中 h 为当地当时的板厚，它和 ϵ 的关系见（8.138)式。

其次，我们要研究靶块 $ABCD$ 运动到 L_B 时，对四周剪力所作的功（图 8-22)。在靶体上，离上面面上 x 处有一元素 dx，设这个元素在变形中靶块靶体作了相对运动 $y^*(x)$，在这个相对位移中有一部分 $y(x)$ 是和约束面相接触的，所以是有效地对屈服剪应力 $\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$ 做了功的。其值为

$$dW_{S_1}=2\pi R_P\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}y(x)dx \tag{8.143}$$

于是，总的剪应力功为

$$W_{S_1}=2\pi R_P\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}\int_0^{h_0} y(x)dx \tag{8.144}$$

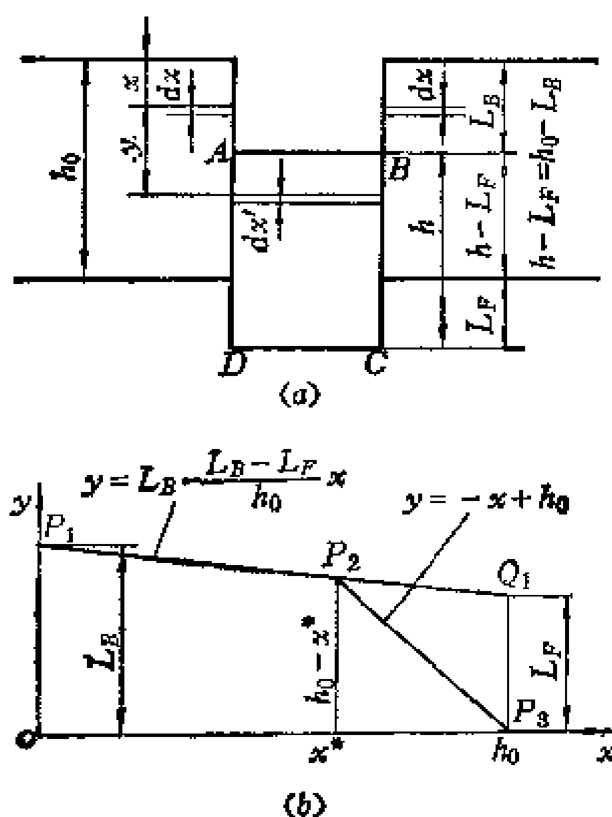


图8-22　靶体做剪力功的有限位移曲线$P_1P_2P_3$

（a）靶块$ABCD$的位移y；（b）位移$y(x)$。

$y(x)$ 是图 8-22b 上的折线 $P_1P_2P_3$。从 $0 \leqslant x \leqslant x^*$ 中，全部位移是接触位移（P_1P_2），都做了功。在 $x^* \leqslant x < h_0$ 中，只有一部分位置是和靶体接触的（P_2P_3），其余部分是放空的位移，因为靶块是均匀压缩的，表面 AB 的位移 $y^*(0)=L_B$，表面 CD 的位移 $y^*(h_0)=L_F$，其它各点的位移从 P_1 到 Q_1 都是 x 的直线函数（均匀压缩）。这个直线函数只有 P_1P_1 段是完全有效的，它可以写成

$$y(x)=L_B-\frac{L_B-L_F}{h_0}x,\quad 0 \leqslant x \leqslant x^* \tag{8.145}$$

从 x^* 到 h_0 这一段中，也是直线分布的，当 $x=h_0$ 时，$y(h_0)=0$，即全部放空；当 $x=x^*$ 时，$y(x^*)=h_0-x^*$，全部接触。所以有

$$y=h_0-x,\quad x^* \leqslant x \leqslant h_0 \tag{8.146}$$

决定 x^* 值的条件是：在 $x=x^*$ 时，(8.145)、(8.146) 相等

$$y(x^*)=L_B-\frac{L_B-L_F}{h_0}x^*=h_0-x^* \tag{8.147}$$

解之，得（引用了 $h_0-h_B+L_F=h$）

$$x^*=\frac{h_0}{h}(h_0-L_B) \tag{8.148}$$

所以，

$$\int_0^{h_0} y(x)dx=\frac{1}{2}x^*(L_B+h_0-x^*)+\frac{1}{2}(h-x^*)^2 \tag{8.149}$$

简化得

$$\int_0^{h_0} y(x)dx=\frac{h_0}{2h}[hh_0-(h_0-L_B)^2] \tag{8.150}$$

于是，得

$$W_{s_1}=\pi R_P\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}\cdot\frac{h_0}{h}[hh_0-(h_0-L_B)^2] \tag{8.151}$$

这里必须指出，吴德瓦德-墨登通过人为的但不很合理的假设，得

到的W_{s1}表达式，和本式有两方面不同：（1）$\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$被用$\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$来代替。（2）$\frac{h_0}{h}$这一因子，在他们的假设中等于1。因此，吴德瓦德-墨登的W_{s1}大大地偏小了。

最后，当AB表面下移时，不断地切断粘接力$\left(\text{即滑动的屈服剪应力}\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}\right)$，所作功为

$$W_{F1}=\frac{2\pi R_P\sigma_Y}{\sqrt{3}}\int_0^{L_B} xdx=\frac{\pi R_P\sigma_Y}{\sqrt{3}}L_B^2 \qquad (8.152)$$

能量守恒定律给我们下列关系：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+W_{C1}+W_{K1}+W_{S1}+W_{F1} \qquad (8.153)$$

把（8.142）式中的W_{K1}代入上式，解出

$$v^2=\frac{1}{m+\rho R_P^2h\pi}\{mv_0^2-2W_{C1}-2W_{S1}-2W_{F1}\} \qquad (8.154)$$

用上述各种关系，我们就可以求得各个L_B值时的ϵ和v值。其数值计算的程序如下：

（1）设取$L_B=i\Delta L_B$，即0，ΔL_B，$2\Delta L_B$，$3\Delta L_B$……；

（2）取$v=v_0$（初始条件），从（8.137）中计算L_B为零时的$\epsilon(0)$，从$h^{(0)}=h_0e^{-\epsilon(0)}$计算$h$值；

（3）把$\epsilon(0)$，$L_B=\Delta L_B$，$h^{(0)}$代入(8.141)，(8.151)，(8.152)，计算W_{C1}，W_{F1}，W_{S1}，其中

$$W_{C1}=\pi R_P^2K\sigma_0[\epsilon(0)]^n\Delta L_B \qquad (8.155a)$$

$$W_{S1}=\pi R_P\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}e^{\epsilon(0)}[h_0^2e^{-\epsilon(0)}-(h_0-\Delta L_B)^2] \qquad (8.155b)$$

$$W_{F1}=\frac{\pi R_P\sigma_Y}{\sqrt{3}}(\Delta L_B^2) \qquad (8.155c)$$

代入 (8.154), 求得$L_B=\Delta L_B$处的v值, 称为$v(\Delta L_B)$;

(4) 用 (8.137) 式计算和$v(\Delta L_B)$相关的ϵ值, 这是$\epsilon(\Delta L_B)$;

(5) 到达$L_B=\Delta L_B$那一点的时间为$t_{\Delta L_B}=\dfrac{2\Delta L_B}{v_0+v(\Delta L_B)}$;

(6) 计算$h^{(1)}=h[\epsilon(\Delta L_B)]=h_0 e^{-\epsilon(\Delta L_B)}$, 这是$L_B=\Delta L_B$处的$h$, 把$v(\Delta L_B)$, $h^{(1)}$, $L_B=2\Delta L_B$代入(8.141), (8.142), (8.153), 计算W_{C_1}, W_{F_1}, W_{S_1}, 其中

$$W_{C_1}=\pi R_P^2 K\sigma_0\{[\epsilon(0)]^n+[\epsilon(\Delta L_B)]^n\}\Delta L_B \tag{8.156a}$$

$$W_{S_1}=\pi R_P\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}e^{\epsilon(\Delta L)}[h_0^2 e^{-\epsilon(\Delta L_B)}-(h_0-2\Delta L_B)^2] \tag{8.156b}$$

$$W_{F_1}=\frac{\pi R_P\sigma_Y}{\sqrt{3}}(2\Delta L_B)^2 \tag{8.156c}$$

代入 (8.154), 求得$L_B=2\Delta L_B$处的v值, 称为$v(2\Delta L_B)$;

(7) 用 (8.137) 式, 计算和$v(2\Delta L_B)$相关ϵ值, 称为$\epsilon(2\Delta L_B)$;

(8) 到达那一点 ($L_B=2\Delta L_B$) 的时间为

$$t_{2\Delta L_B}=\frac{2\Delta L_B}{v_0+v(\Delta L_B)}+\frac{2\Delta L_B}{v_0+v(2\Delta L_B)} \tag{8.157}$$

(9) 依此类推, 逐一计算$v(i\Delta L_B)$的值。

现在让我们研究怎样结束第一阶段的计算。其结束条件为AB的速度$v=\dfrac{dL_B}{dt}$等于CD的速度$v'=\dfrac{dL_F}{dt}$。根据(8.128), 对它求t的导数, 得

$$v+\frac{dh}{dt}=v' \tag{8.158}$$

当$v=v'$时, $\dfrac{dh}{dt}=0$, 但$h=h_0e^{-\epsilon}$, 这个条件相当于

$$\frac{d\epsilon}{dt}=0 \tag{8.159}$$

也即是说, 看两次连续计算时是否得$\epsilon(L_B)=\epsilon(L_B+\Delta L_B)$, 或是

根据（8.137），是否有

$$v\,(L_B) = v\,(L_B + \Delta L_B) \tag{8.160}$$

这就是到达第一阶段结束时的条件。

设我们求得了第一阶段结束时的时间、速度、L_B、h，并分别用t_1，v_1，L_{B1}，h_1表示；有关的ϵ用ϵ_1来表示。在这些数值的基础上，研究第二阶段的运动。

在第二阶段中，靶块不再变形了，$h=h_1$是一个常数，而且靶块和弹体已经完全成一整体在一起运动。根据能量守恒定律，我们有

$$\frac{1}{2}(m+\pi R_P^2 h_1 \rho)v_1^2 = \frac{1}{2}(m+\pi R_P^2 h_1 \rho)v^2 + W_{S_2} + W_{F_2} \tag{8.161}$$

其中W_{S_2}为剪应力功，W_{F_2}为粘结摩擦功。

$$W_{S_2} = 2\pi R_P \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \int_{L_{F1}}^{x} (h_0 - x)\,dx = \pi R_P \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} (x - L_{F_1}) \times (2h_0 - x - L_{F_1}) \tag{8.162a}$$

$$W_{F_2} = 2\pi R_P \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \int_{L_{F1}}^{x} x\,dx = \pi R_P \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} (x^2 - L_{F_1}^2) \tag{8.162b}$$

而

$$W_{S_2} + W_{F_2} = 2R_P \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} (x - L_{F1})(h_0 - L_{F1}) \tag{8.163}$$

（8.161）可以写成

$$v^2 = v_1^2 + \frac{4R_P \sigma_Y (h_0 - L_{F1})}{(m+\pi R_P^2 h_1 \rho)\sqrt{3}} (x - L_{F1}) \tag{8.164}$$

末端速度为

$$v_f^2 = v_1^2 + \frac{4R_P \sigma_Y (h_0 - L_{F1})^2}{(m+\pi R_P^2 h_1 \rho)\sqrt{3}} \tag{8.165}$$

§8.8 靶元破坏速度的诸估算公式

文献[8-25]曾提到了靶元在各种穿孔破坏时（图 1-3）的粗略的估算公式。这些公式认为可以适用于平头弹体。但是由于这种公式的粗略性，并没有广泛地和实验校核，所以使用起来应该极端慎重。

（1）在撞击时有一个初始的压缩波，当它到达板的背面时，由于最大剪应力达到了屈服值而在背面产生压缩破坏。其破坏撞击速度为

$$v_A=\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\frac{\sigma_{YS}}{Z}\left[1+\left(\frac{h_0}{R_P}\right)^2\right]^{1/2} \tag{8.166}$$

其中 Z 见（1.10），为

$$Z=\frac{\rho_t c_{Dt}\rho_P c_{OP}}{\rho_t c_{Dt}+\rho_P c_{OP}} \tag{8.167}$$

（8.166）式的 ν 为泊桑比。

（2）在撞击的初始应力波到达靶板背面时，其径向应力达到拉伸屈服值所产生的破坏。其破坏撞击速度为

$$v_A=\frac{2\sigma_{YT}\left[1+\left(\frac{h_0}{R_P}\right)^2\right](1-\nu)}{Z\left\{(1-\nu)+2\nu\left[1+\left(\frac{h_0}{R_P}\right)^2\right]^{1/2}\right\}} \tag{8.168}$$

（3）在应力波反射时，在背面的正应力 σ_x 达到屈服应力 σ_{YT}，而产生的层裂破坏。其极限破坏速度为

$$v_A=\frac{\sigma_{YT}}{Z}\,\frac{1+\left(\frac{h_0}{R_P}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{h_0}{R_P}\right)^2\right]^{1/2}-1} \tag{8.169}$$

（4）由于最大剪应力超过屈服剪应力面产生的挤凿破坏极限速度，以及由于最大正应力超过屈服应力 σ_{YT} 而产生的花瓣型破坏极限速度分别为

$$v_A=\left[\frac{\sigma_{YT}}{\rho_t}\left(\frac{h_0}{R_p}\right)\right]^{1/2}\left[e^{\frac{2\rho_t h_0}{\rho_p L}}-1\right]^{1/2} \quad (8.170\text{a})$$

$$v_A=2\left[\frac{\sigma_{YT}}{\rho_t}\left(\frac{h_0}{R_p}\right)\right]^{1/2}\left[e^{\frac{2\rho_t h_0}{\rho_p L}}-1\right]^{1/2} \quad (8.170\text{b})$$

§8.9　流体动力学撞击理论简述

当靶板受超高速弹体撞击时，剪切阻力完全可以略去，主要的阻力来自流体动力压强和各种冲击波。这样，我们可以把靶体和弹体都看作是流体。这种流体力学模式近年来有较大发展。其中重要的工作有〔8-26，8-27，8-28，8-29，8-30〕等，并发展了许多数值计算方法和计算程序。概况见§2.5。参考〔8-31〕～〔8-33〕。最有意义的是用冲激波的观点对撞击所造成的在弹体四周逸出大量微小物质颗粒群的现象的研究和解释，见图8-23 *a*、*b*。

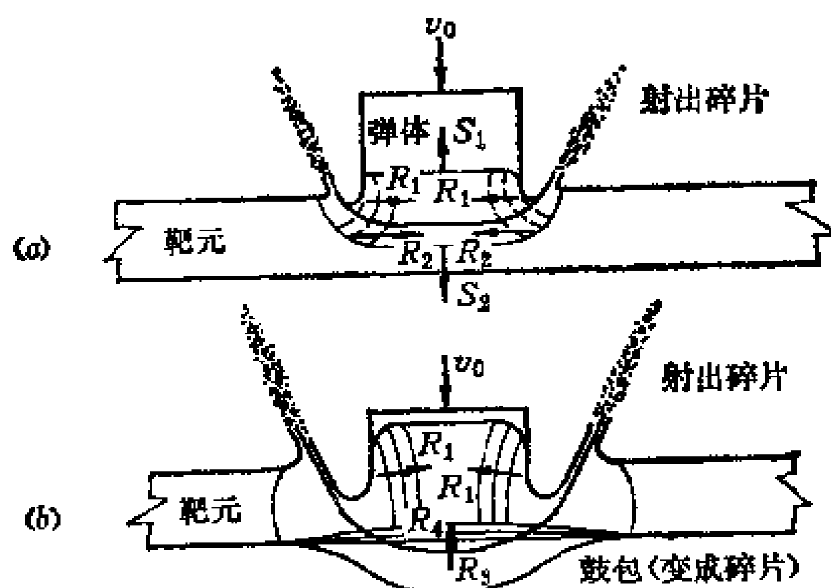


图8-23　圆柱弹体超高速撞击薄板所产生的冲击波和射击的碎片

(*a*) 冲击波从接触向上下左右传播；(*b*) 冲击波反射所生的背面鼓包。

当弹体撞击靶元时，撞击面上发生方向相反的冲激波S_1、S_2，其中S_1冲向弹体，S_2冲向靶元的背面。S_1在弹体靶元的交接周界上很快就得到反射，产生的反射波R_1、R_2射向对称轴线，而且在反射波的身后，有不少碎片，按反射波反作用的方向从弹体靶元的

交接周界中飞逸出来。当 S_1、S_2 分别达到弹体和靶元的自由面时，也产生反射冲激波 R_1 和 R_3。由于 R_3 的反作用，靶板背面产生了常见的鼓包。R_1，R_2，R_3 都是反射的膨胀波。R_3 这个波在反射道路，再通过接触面，在接触面上透射到靶体中去，称为 R_4。由于冲激波 S_1 和反射波 R_1，R_2，以及以后的多次反复的反射作用，更多碎片从靶元和弹体相交接的周界上射出。

当拉伸应力超出临界值时，发生断裂，这种断裂造成更多应力波和冲击波。断裂面的产生增加了零应力的自由表面，因而增加了反射波，这些波叠加在一起，造成一些瞬时的过大的局部应力，进面产生更多的断裂面。这就是为什么在初始的自由表面附近发生了层裂面以后，还有更多的层裂面产生的原因。

靶板中的每一物质元素经受着一系列非等熵的虎各诺渥(Hugoniot）激波过程，然后又绝热地通过膨胀波回到通常的压强，这样的过程产生局部的激波加热，从而在不同压强下引起熔化、液化、甚或汽化。许多金属在 30～200，35～200，100～200GPa 之间分别产生不完全熔化、完全液化和汽化。激波压 p_1，质点速度 v_1 在激波 S_1（弹体中的激波），S_2（靶板内的激波）内可以用一维的激波动量守恒、质量守恒关系求得。这些关系统称为虎各诺渥关系。设 S_1 激波的速度为 U_1，S_2 激波的速度为 U_2，于是虎各诺渥关系可以写成（图 8-24）

$$p_1 = \frac{\rho_{P0} v_0^2}{1-\rho_{P0}/\rho_{t0}} \left\{ 1 + \left[\frac{\rho_{P0}(1-\rho_{t0}/\rho_{P0})}{\rho_{t0}(1-\rho_{P0}/\rho_{P1})} \right]^{1/2} \right\}^{-2} \tag{8.171 a}$$

$$v_1 = v_0 \left\{ 1 + \left[\frac{\rho_{t0}(1-\rho_{P0}/\rho_{P1})}{\rho_{P0}(1-\rho_{t0}/\rho_{t1})} \right]^{1/2} \right\}^{-1} \tag{8.171 b}$$

$$U_1 = \frac{v_0 - (\rho_{P1}/\rho_{P0}) v_1}{\dfrac{\rho_{P1}}{\rho_{P0}} - 1} \tag{8.171 c}$$

$$U_2 = \frac{v_1}{(1-\rho_{t0}/\rho_{t1})} \tag{8.171 d}$$

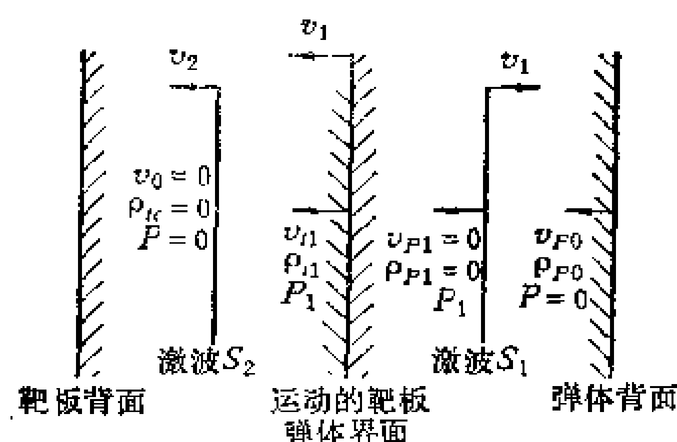


图8-24　一维问题中当激波S_2撞击靶板背面后的情况

其中

$$\left.\begin{aligned}
&v_0 = \text{撞击速度}\\
&v_1 = \text{在冲激波间的物质运动速度}\\
&U_1 = \text{弹体中的激波速度}\\
&U_2 = \text{靶体中的激波速度}\\
&p_1 = \text{激波间区域的压强}\\
&\rho_{P0} = \text{未压缩前弹体材料的密度}\\
&\rho_{P1} = \text{弹体材料在压力 } p_1 \text{ 下的密度}\\
&\rho_{t0} = \text{未压缩前靶板材料的密度}\\
&\rho_{t1} = \text{靶板材料在压力 } p_1 \text{ 下的密度}
\end{aligned}\right\} \tag{8.172}$$

用数值方法跟踪激波和膨胀波是很有效的，有关固体中的激波在〔8-29〕和〔8-30〕中曾有详尽的讨论。

图 8-25 为图 8-23 中 R_1、R_2膨胀波还没有到达时流场中的一维拉格朗日图。图上的纵坐标是时间坐标 t，横坐标是流场的位置，以 $t=0$ 时的靶体、弹体交界面的位置为原点。交界面向靶体一侧的运动速度为 v_1，激波 S_2 的运动速度（向靶体背面的运动速度）为 U_2，而且 $U_2>v_1$，因此先达到靶体背面；在激波 S_2 冲击后，这个背面得到一个向左的速度，它的反射波是一个膨胀波 R_5，它相对于靶板材料而言的速度是在 p_1 压强下的声速 $c_{(t0)t}$，而绝对速度是$c_{(t0)t}-v_1$（正的向右）。当它和交界面 I 接触后，有一部分向左反射了回去，有一部分透射过靶体、弹体的交界面，

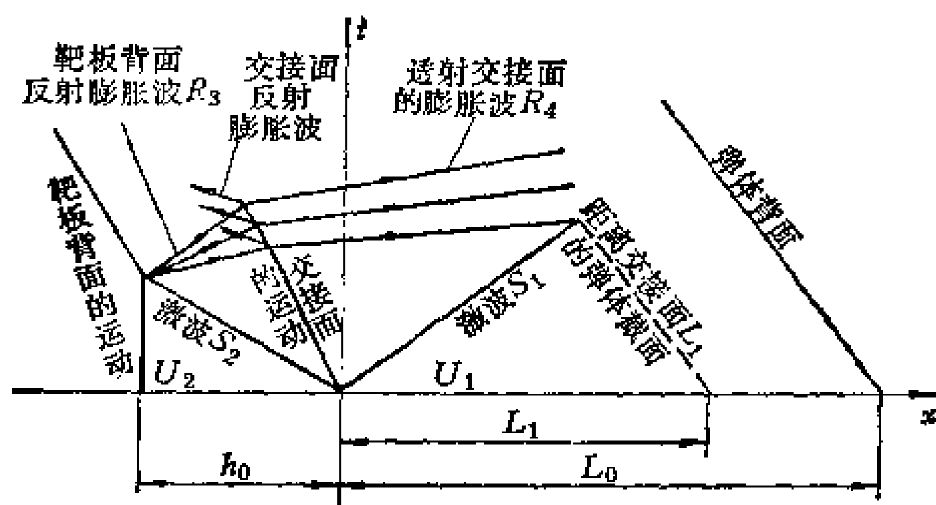


图8-25　平面弹体（柱形）超高速撞击薄靶板时的激波和流动的拉格朗日图

从靶体进入弹体。它在弹体中的速度，相对于不动的弹体而言是弹体材料的声速 $c_{(s0)P}$，它的绝对速度为 $c_{(s0)P}-v_1$。如果弹体和靶体是相同的材料，在膨胀波通过界面时，就没有反射波，而是全部都透射过去。对于薄靶板而言，透射的膨胀波 R_4 会赶上弹体中的激波 S_1。设 L_1 为 R_4 赶上 S_1 的地方离弹体、靶板接触面的距离。在理论上，离弹体撞击面距离为 L_1 以外的弹体区域，到现在为止还没有感觉到撞击。

L_1 和原来弹体的长度 L_0 之比为

$$\frac{L_1}{L_0}=\gamma^*\ \frac{c_{P0}}{c_{t0}}\left[\frac{c_{(s0)t}+U_2-v_1}{c_{(s0)P}-U_1-v_1}\right]\left[\frac{c_{(s0)P}}{c_{(s0)t}}\right]\left[\frac{U_1+v_1}{U_2}\right] \tag{8.173}$$

其中 γ^* 为靶板的单位面积的质量和弹体单位面积的质量之比。

$$\gamma^*=\frac{\rho_{t0}h_0}{\rho_{P0}L_0} \tag{8.174}$$

为了计算 L_1/L_0，我们必须知道 $c_{(s0)P}$，$c_{(s0)t}$。如果这些材料的状态方程是已知的，则我们就能计算声速 c。很不幸，大多数面体材料的状态方程，我们并不清楚；对于 5Mbar 压强下的金属而言，在激波后面的压强为 P 的材料中，声速可以近似地用下式

表示：

$$c_{(so)}=U\left[0.49+\left(\frac{U-v}{U}\right)^2\right]^{1/2} \quad (8.175)$$

其中U是压强为P的激波速度，v为激波后侧的质点速度。在这个方程式中，不论U、v都是相对于静止的未受干扰的材料而言，U就是U_2，v就是v_1；对于弹体而言，U就是U_1+v_0，v就是v_0-v_1。

如果从（8.173），计得到$L_1/L_1<1$，则膨胀波R_4赶上弹体中的激波，从而使激波的压强降低。浮尔斯[8-35]曾设法计算过，如果弹体和靶板是相同的材料，膨胀波R_3赶上激波S_1并减弱其压强的过程。在这个方法中，浮尔斯把材料看作为可压缩性而又是非粘性的流体，并假定在流场中，熵到处不变，就在穿过激波时也不变。他的分析，一直到柱形膨胀波R_1在对称轴上赶上激波S_1时都是有效的（图 8-23 a），并证明R_1赶上激波S_1的地点，离弹体的撞击表面的距离为L_{1p}

$$L_{1p}=0.72D_p \quad (8.176)$$

其中D_p为弹体直径。

同样，R_2在靶体的轴线上和S_2相遇。相遇地点为

$$L_{1t}=0.72D_p \quad (8.177)$$

L_{1t}也是从接触而算起的。如果$h<L_{1t}$，则侧面的膨胀波R_2将赶不上靶板内的激波S_2，只能和S_2反射回来的膨胀波R_3相遇。

根据上述这些考虑，碎块击飞的方向和轴成45°角。

§8.10 斜击时的运动方向变化，里希脱-尹泼荪理论(1963)[8-36]

从撞击后的弹孔可以看到，斜击弹体进入靶板后，首先是斜度增加。很象弹体要跳飞那样，以后逐步恢复，最后穿过靶板时，离开靶板的角度常常比入射角小，有时小得很多。在开始时那种斜角增加的倾向，主要由靶体弹体接触时的接触反力所决定的。这种反力可以看作是流体压力作用在弹体上的升力分

量[8-37,8-38,8-39]，以后恢复减小斜角的原因，主要是由于靶体的破坏引起了弹体表面上所受的力重新分配面引成的。

里希-尹泼荪研究了这个问题。他们假定弹体和凿块在离开靶体时，方向相同。速度也相同。设斜击的弹体入射角为θ（图8-26），弹体在凿离靶板时的偏角β。所以，弹道在离靶时的斜角为θ－β。转折角线离靶板法线很近。开始的动量为m_pv_0，方向和入射角相同，但用于撞击凿孔的只是它的一个分量$m_pv_0\cos\beta$。因此，我们可以认为有效的撞击速度是$v_0\cos\beta$，面不是v_0。同样，有效的斜击的弹道极限速度是$v_{l0}\cos\beta$。凿块的质量和正击的凿块质量不一样。因为凿块的有效厚度为$h_t/\cos\theta$。所以，凿

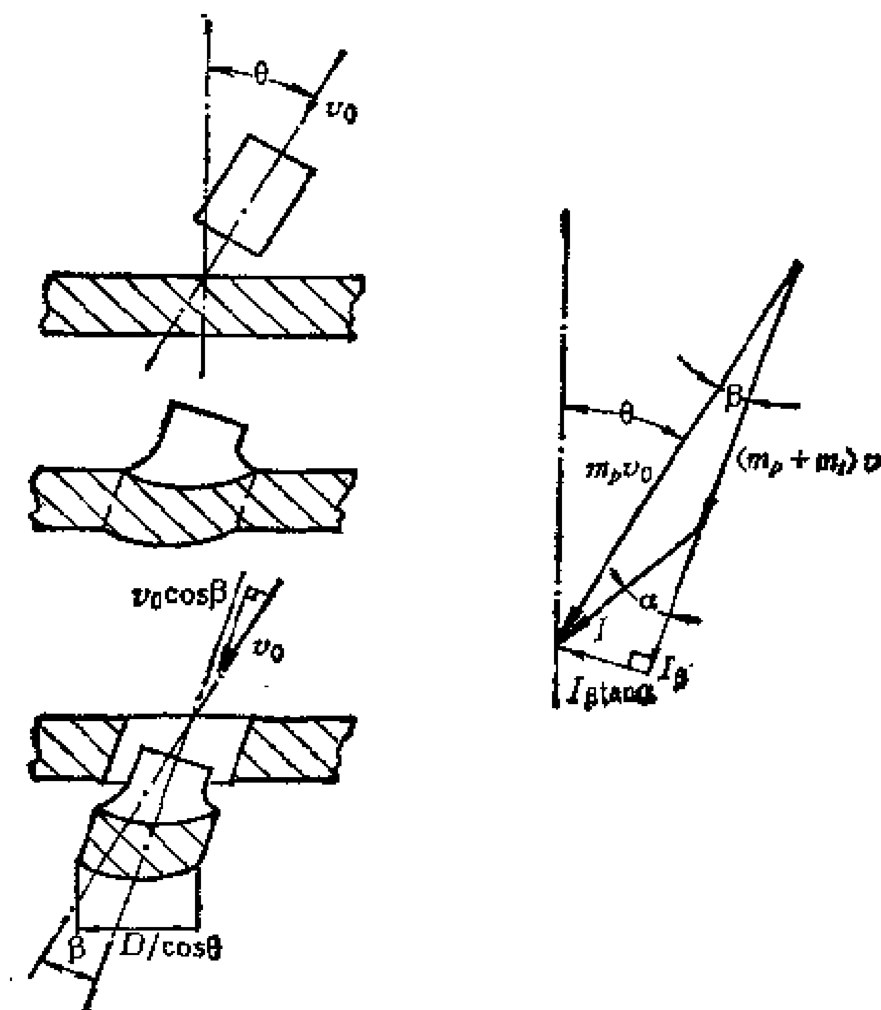


图8-26 斜击方向和凿离方向，以及动量、冲量矢量图

块质量应该是 $m_t=\rho_t\pi R_t^2\dfrac{h_t}{\cos\theta}$。于是，击穿后的剩余速度为

$$v=\frac{(\cos^2\beta v_0^2-\cos^2\beta v_{50}^2)^{1/2}}{1+m_t/m_p}=\frac{\cos\beta\,(v_0^2-v_{50}^2)^{1/2}}{1+\dfrac{\rho_t}{\rho_p}\left(\dfrac{R_t}{R_p}\right)^2\dfrac{h_t}{L\cos\theta}}$$

(8.178)

下面我们将说明怎样决定 β。根据图 8-26，动量冲量图中的冲量 I 代表传给靶板（除了凿块以外的靶板）的冲量，$(m_p+m_t)v$ 为凿离的靶板的弹体和凿块的动量，m_pv_0 为弹体的初始动量。而冲量只能通过弹孔周围的剪切面传给靶板。如果产生冲量的力只和凿块的形状和极限剪力有关，它们都是不变的，所以，I 只和凿离过程所耗时间 Δt 成正比。Δt 越长，I 越大；Δt 越短，I 越小。所以矢量 I 的大小和速度成反比。但另一方面，动量矢 m_pv_0 和 $(m_p+m_t)v$ 都和速度成正比。所以，从图 8-26 中可以看到，速度越高，β 越小。根据这个想法，我们可以求得计算 β 的近似式。弹体通过靶体分成两个过程：（1）弹体减速度；（2）通过剪切作用，凿下靶块。在第一阶段结束时，弹体、靶块的共同速度为 $\dfrac{m_pv_0\cos\beta}{m_p+m_t}$，在第二阶段结束时，速度变为离靶速度 v。于是平均的剪切凿块速度 $\bar{v}$ 为

$$\bar{v}=\frac{1}{2}\left(v+\frac{m_pv_0\cos\beta}{m_p+m_t}\right) \tag{8.179}$$

所以，I_β 近似地为

$$I_\beta\approx K_1\Delta t\approx\frac{2K_2}{v+\dfrac{m_p}{m_p+m_t}v_0\cos\beta} \tag{8.180}$$

其中 K_1、K_2 都是待定常数。

当在弹道极限状态时，

$$v=0,\qquad v_0=v_{50},\qquad \beta=\beta_{50} \tag{8.181}$$

因而从图 8-26 可得

$$(I_\beta)_{50}=m_pv_{50}\cos\beta_{50} \tag{8.182}$$

但是，从（8.180）又可得

$$(I_\beta)_{50}=\frac{2K_2(m_p+m_t)}{m_p v_{50}\cos\beta_{50}} \tag{8.183}$$

从（8.182）、（8.183），得

$$K_2=\frac{m_p^2 v_{50}^2\cos^2\beta_{50}}{2(m_p+m_t)} \tag{8.184}$$

把（8.178）的 v 和（8.184）的 K_2 代入（8.180），得

$$I_\beta=\frac{m_p v_{50}^2\cos^2\beta_{50}}{v_0\cos\beta\left[1+\left(1-\frac{v_{50}^2}{v_0^2}\right)^{1/2}\right]} \tag{8.185}$$

但从图 8-26，有

$$I_\beta=m_p v_0\sin\beta/\tan\alpha \tag{8.186}$$

消去 I_β，得

$$\sin\beta\cos\beta=\frac{\left(\frac{v_{50}}{v_0}\right)^2}{1+\left(1-\frac{v_{50}^2}{v_0^2}\right)^{1/2}}\cos^2\beta_{50}\tan\alpha \tag{8.187}$$

当 v_0 接近于 v_{50} 时，α 接近于 β_{50}，如果在一般 v_0 时，α 也取 β_{50}，则对于从（8.187）式计算 β，也引进不了多大的误差（见〔8-36〕），所以（8.187）可以近似地写成

$$\sin2\beta=\frac{\frac{v_{50}^2}{v_0^2}}{1+\left(1-\frac{v_{50}^2}{v_0^2}\right)^{1/2}}\sin2\beta_{50} \tag{8.188}$$

v_{50}、β_{50} 都是从实验决定的。

图 8-27 为里希脱-尹浚荪的实验和理论曲线的比较。

里希脱-尹浚荪的实验是用钢弹体（圆柱形，HRC30，或HB 285）撞击低碳钢靶板（HB190）。靶板厚 h_t 和弹体长 L 之比为 0.24～0.29。撞击斜角 θ 为 45°，测得的 β_{50} 也是45°。此外，我们用不同速度 v_0 撞击，测得不同的剩余速度，作出图 8-28，这样就可以求得 v_0 轴上的交点，它是 v_{50}。有了实验决定的 v_{50} 和 β_{50}，

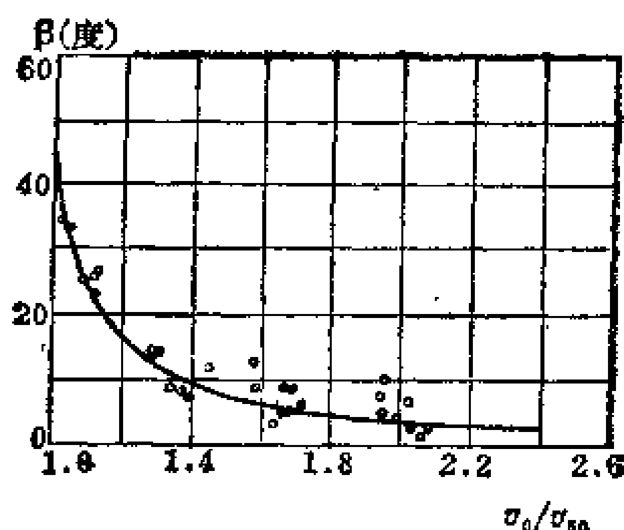


图8-27　弹体离开靶体时偏离入射方向的角度β

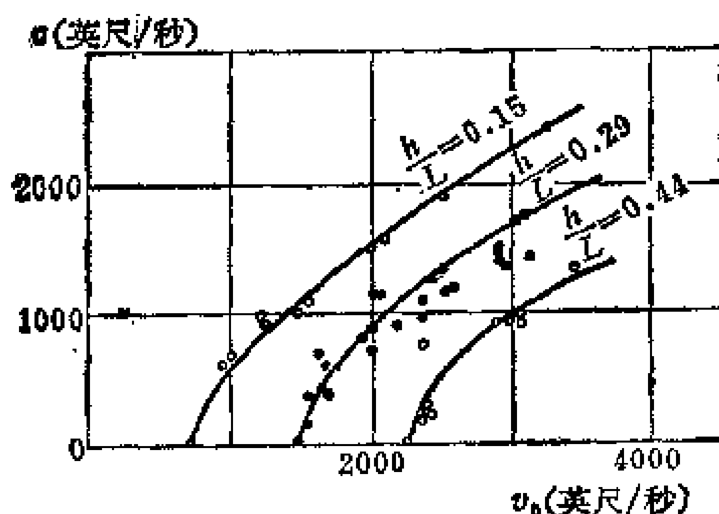


图8-28　撞击速度v_0和剩余速度v

就可以用（8.188)计算β和$\frac{v_{50}}{v_0}$的理论曲线，从而用(8.187)计算v和v_0的理论曲线。从图上看到，理论和实验在实验误差的范围以内，符合很好。从图8-27中可以看到v_0越大，β越小。

§8.11　斜击时截顶锥头弹体的采特-保尔动量理论(1959)[8-4]

采特-保尔在他们的截顶锥头弹体正撞时的动量理论的基础

上[8-2,8-6]（见§8.2），研究了斜击的速度损失。这也可以说是最早的斜击理论。他们没有研究撞击转向问题，只提出了研究计算转向问题的一般程序。他们把锥头弹体的斜击分为三种类型，见图 8-29。

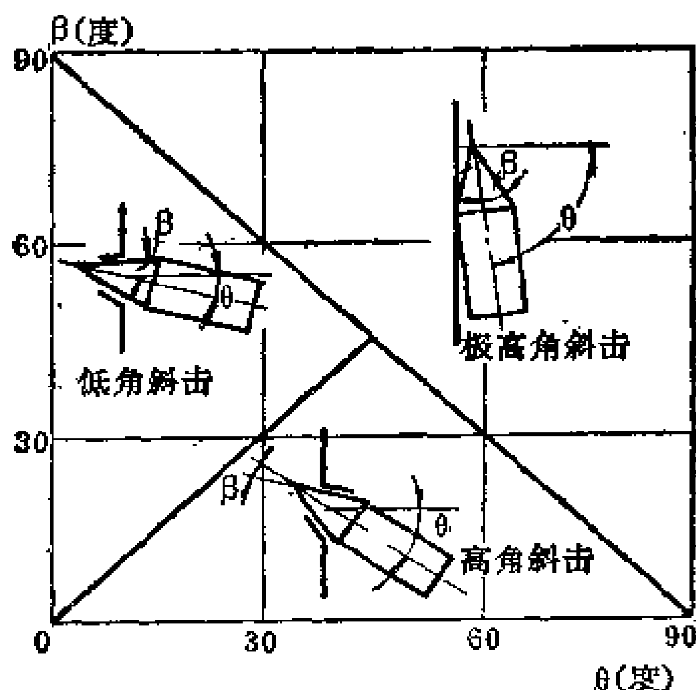


图8-29　三类斜击的位置和花瓣型击穿

（a）低斜角撞击$\left(0\leqslant\beta-\theta\leqslant\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$，花瓣型弹孔，都是向前的。

（b）高斜角撞击$\left(0\leqslant\theta-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}-2\beta\right)$，花瓣型弹孔，前方的花瓣向后，后边的花瓣向前。

（c）极高斜角的撞击$\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta-\beta\right)$，花瓣型弹孔，但弹体侧面和靶板接触。

现在让我们主要研究第二种斜击，即高斜角撞击。在撞击过程中，分为四个步骤（图 8-30）。

第一步：凿块开始形成，开始形成花瓣孔口。

第二步：凿块已经形成，花瓣孔口全部形成，紧贴于锥面。

第三步：凿块完全形成，花瓣孔口进一部扩展，开始有碎片

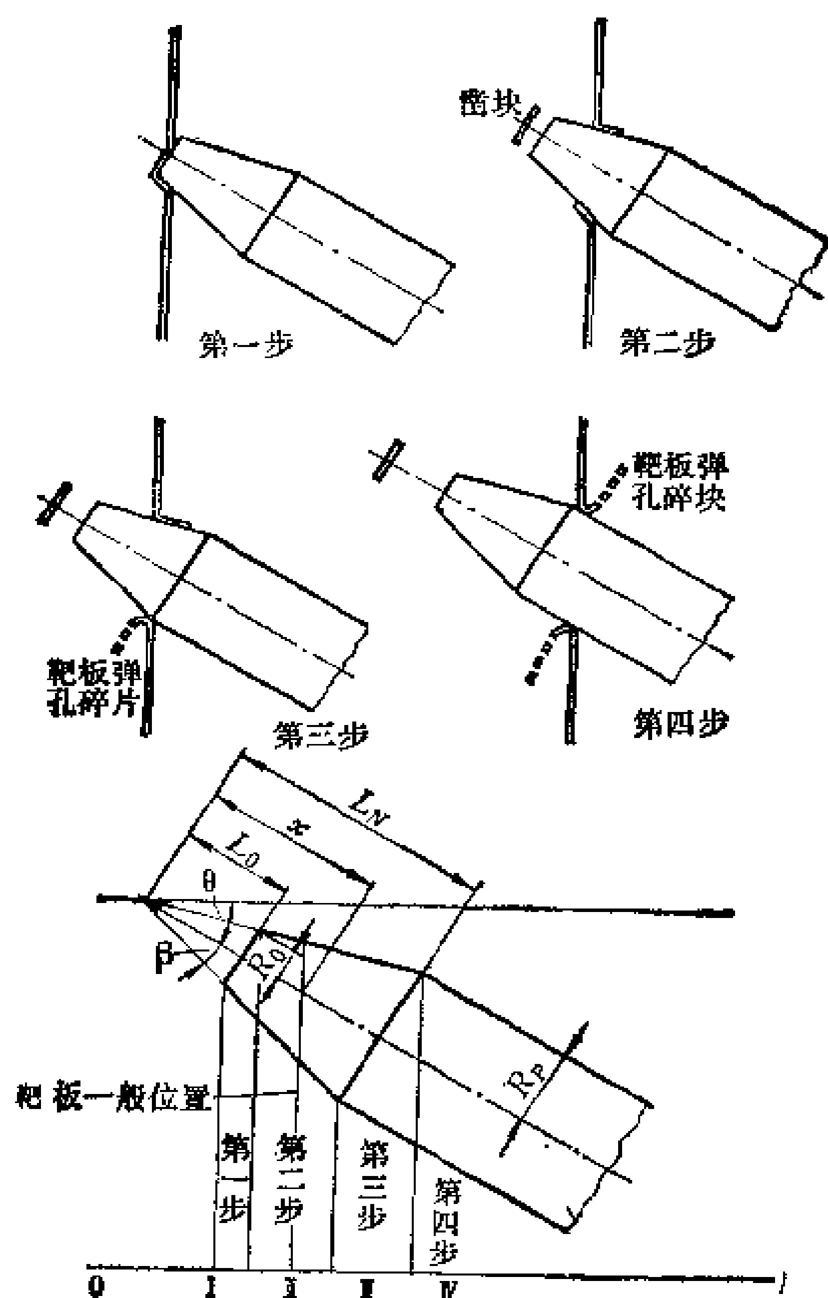


图8-30　击穿的四个步骤

向前飞逸。

第四步：花瓣孔口不再扩展，大量碎片向前向后同时飞逸。

对于弹头较短的弹体，在撞击时，有时没有明显的第二步。有时，第一步第二步好象是同时发生的（弹头很短）。

弹体位移是用锥尖到靶板在弹轴上所测距离来量度的。每一步的极限位移为

$$x_0 < L_0 - R_0 \tan\theta \tag{8.189a}$$

$$L_0 - R_0 \tan\theta \leqslant x_{\mathrm{I}} < L_0 + R_0 \tan\theta \tag{8.189b}$$

$$L_0 + R_0 \tan\theta \leqslant x_{\mathrm{I}} < L_N - R_P \tan\theta \tag{8.189c}$$

$$L_N - R_P \tan\theta \leqslant x_{\mathrm{I}} < L_N + R_P \tan\theta \tag{8.189d}$$

$$L_N + R_P \tan\theta \leqslant x_{\mathrm{IV}} \tag{8.189e}$$

（1）靶块的形成　现在让我们研究凿离靶块的过程。这里研究的是半径为 R_0 的圆柱和靶板相斜交所形成的凿块。在靶体的位置为 x 时，凿离靶板的靶块应该是图 8-31 中的阴影部分 $A(\delta)$。在完成凿离靶块的过程中，$x = x_{I\max}$，靶块为一椭圆，其半短轴为 R_0，其半长轴为 $R_0/\cos\theta$。$A(\delta)$ 的 δ 为图 8-31 中的椭圆的阴影部分的方位角。

从图 8-31，我们可以证明

$$a \sin\delta = -\frac{L_0 - x}{\cos\theta} \tag{8.190}$$

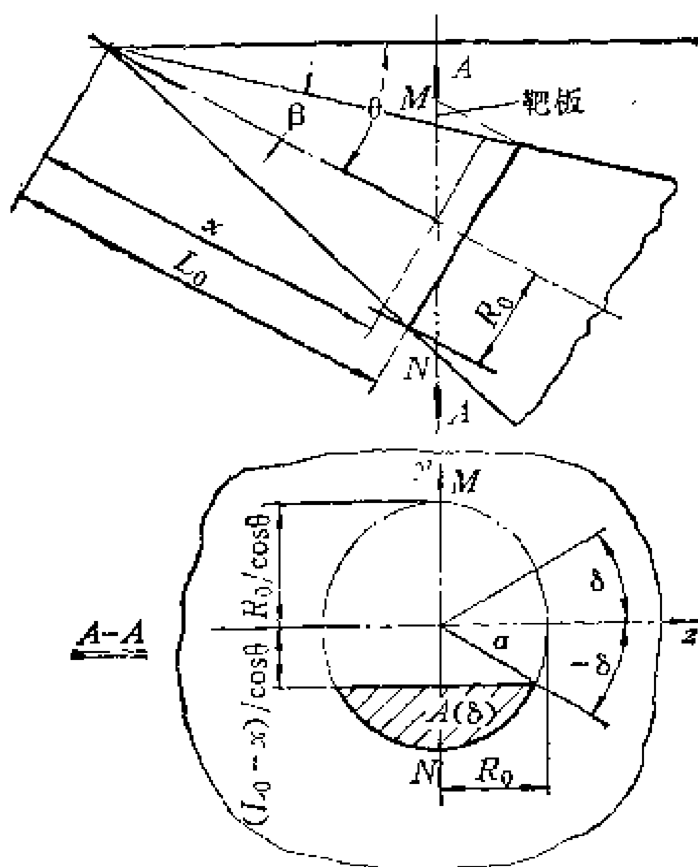


图8-31　在 x 位置时凿离的靶板 $A(\delta)$

其中 $a=a(\delta)$

$$a(\delta)=-\frac{L_0+x}{\sin\delta\cos\theta} \tag{8.191}$$

椭圆方程为

$$\frac{y^2}{(R_0/\cos\theta)^2}+\frac{z^2}{R_0^2}=1 \tag{8.192}$$

y，z 用 a 为参数时的参数方程

$$\left.\begin{aligned} y&=a(\delta)\sin\delta \\ z&=a(\delta)\cos\delta \end{aligned}\right\} \tag{8.193}$$

把（8 193）代入（8.192）式，消去 y、z，得

$$a(\delta)=\frac{R_0}{(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}} \tag{8.194}$$

由是，从图 8-31，有几何关系

$$a(\delta)\sin\delta\cos\delta=L_0-x \tag{8.195}$$

如从（8.194），（8.195）式中消去$\sin\delta\sin\theta$，并用$R_0=L_0\tan\beta$，即可证明

$$a(\delta)=L_0\left[\tan^2\beta+\left(1-\frac{x}{L_0}\right)^2\right]^{1/2} \tag{8.196}$$

把它代入（8.191），即得

$$\sin\delta=\frac{\dfrac{x_I}{L_0}-1}{\sin\theta\left[\tan^2\beta+\left(\dfrac{x_I}{L_0}-1\right)^2\right]^{1/2}} \tag{8.197}$$

从图 8-31 中可以看到

$$1-\tan\beta\tan\theta\leqslant\frac{x_I}{L_0}\leqslant1+\tan\beta\tan\theta \tag{8.198}$$

x_I/L_0 的最大范围为

$$0\leqslant\frac{x_I}{L_0}\leqslant2 \tag{8.199}$$

而 δ 的变化范围为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\delta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{8.200}$$

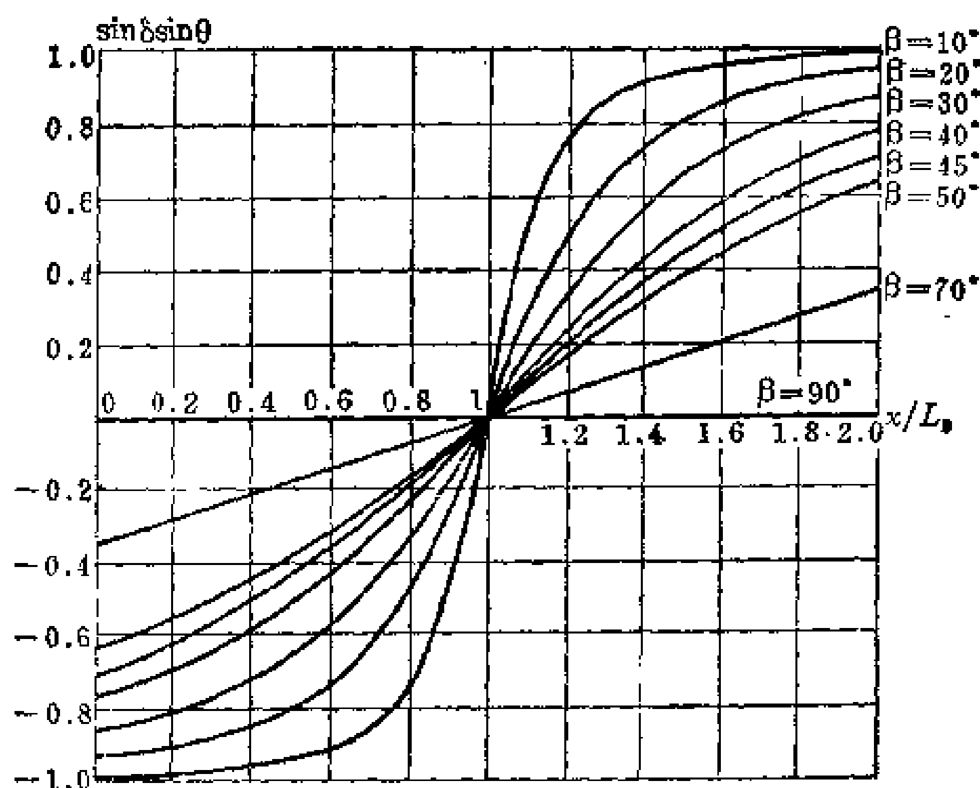


图8-32 δ与侵入位移x的关系曲线

第一步结束的 $\delta=\frac{\pi}{2}$。图 8-32 为$\sin\theta\sin\delta$ 在整个$\frac{x_1}{L_0}$域内的曲线.

椭圆部分面积$A(\delta)$是由下列公式给出的

$$A(\delta)=2\left[\int_{-\pi/2}^{\delta}\frac{1}{2}a^2d\delta-\frac{1}{2}a^2(\delta)\sin(-\delta)\cos(-\delta)\right] \tag{8.201}$$

用了（8.194）中的a，就可以积分求得

$$A(\delta)=R_0^2\left[\frac{\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(\cos\theta\tan\delta)}{\cos\theta}+\frac{\sin\delta\cos\delta}{1-\sin^2\theta\sin^2\delta}\right] \tag{8.202}$$

在第一步结束时，$\delta=\frac{\pi}{2}$，则

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi R_0^2}{\cos\theta} \tag{8.203}$$

弹体在任意距离 x_1 时凿下来的靶块的质量为

$$M_{靶块}=\rho_t h_t A(\delta) \tag{8.204}$$

其速度应该是（见§8.3）

$$V_{靶块}=Kv_0,\quad 1\leqslant K\leqslant 2 \tag{8.205}$$

其中K是实验决定的，对于T 2024合金铝靶板和硬化钢弹而言，$K=1.2$。所以，弹体在x_I时传递给靶块的动量为

$$M_{om靶块}=K\rho_t h_t v_0 A(\delta),\quad 0<x_I\leqslant x_{I\max} \tag{8.206}$$

对于$x\geqslant x_{I\max}$而言

$$M_{om靶块}=\frac{K\rho_t h_t \pi R_0^2 v_0}{\cos\theta} \tag{8-207}$$

（2）花瓣弹孔的形成　弹孔的花瓣有向前的部分，也有向后的部分。图8-33是截顶锥头的三维几何图。BC是1/4圆周，它是锥面和正截面的交线。DC是$\frac{1}{4}$椭圆，它是锥面和靶板的交线，$\overline{AP}$是锥顶和椭圆DC任意点P的连结直线，AOP是通过锥轴和$\overline{AP}$线的平面。

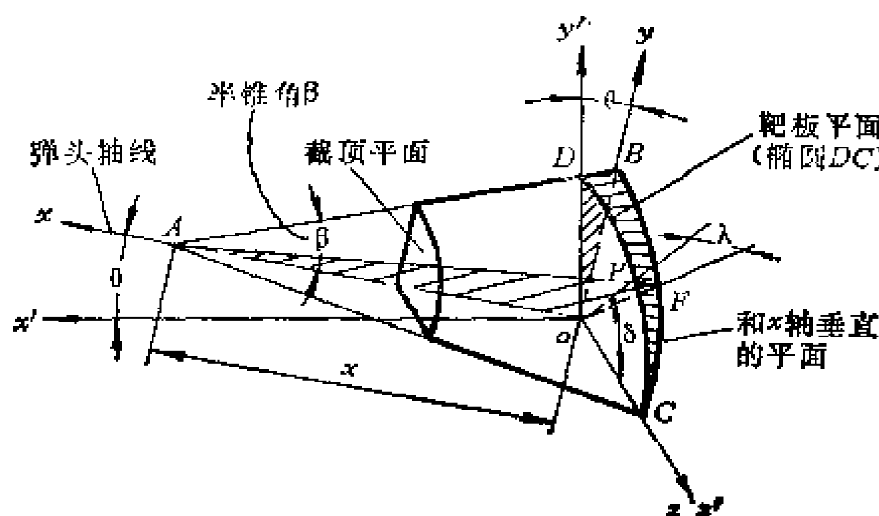


图8-33　弹头三维几何图

从图8-33上，称$\angle POF$（F为AP的延长线和圆BC相交的点）为λ，当$\delta=\frac{\pi}{2}$，$\lambda=\theta$；当$\delta=0$，$\lambda=0$。决定花瓣向前向后的条件是

$$\left.\begin{array}{ll}\beta-\lambda>0 & \text{花瓣向前}\\ \beta-\lambda<0 & \text{花瓣向后}\end{array}\right\} \tag{8.208}$$

交界点处有

$$\lambda^{*}=\beta \tag{8.209}$$

图 8-33 的几何关系给出

$$\sin\delta=\frac{\sin\lambda}{\sin\theta} \tag{8.210}$$

所以，在花瓣向前、向后的交界处，把 (8.209) 代 (8.210)，

$$\sin\delta^{*}=\frac{\sin\beta}{\sin\theta} \tag{8.211}$$

$\delta^{*}(\beta,\ \theta)$ 的曲线见图 8-34。应指出，不论如何，δ^{*}一定比 0 大，比$\frac{\pi}{2}$小，即 $0\leqslant\delta^{*}\leqslant\frac{\pi}{2}$。当 $\theta=\beta$ 时，$\delta^{*}=\frac{\pi}{2}$。对于低斜角而言，$\theta<\beta$，(8.211) 不适用，这时 (8.211) 用 $\delta^{*}=\frac{\pi}{2}$代替。

所以，花瓣向前向后的准则为

$$\left.\begin{array}{ll}\delta<\delta^{*} & \text{花瓣向前}\\ \delta>\delta^{*} & \text{花瓣向后}\end{array}\right\} \tag{8.212}$$

图 8-35 是描写 (8.212) 式的结论的。

根据图 8-33，$\overline{OP}$等于在任意方向的椭圆径向坐标，也等于 a'。我们有

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\angle OFP}=\frac{\overline{OF}}{\sin\angle OPF} \tag{8.213}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OF}=a',\quad \overline{OF}=x\tan\beta\\ \angle OFP=\frac{\pi}{2}-\beta,\ \angle OPF=\frac{\pi}{2}+\beta-\lambda\end{array}\right\} \tag{8.214}$$

把 (8.214)，(8.210) 代入 (8.213)，得

$$a'=\frac{x\tan\beta}{(1-\sin^{2}\theta\sin^{2}\delta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta} \tag{8.215}$$

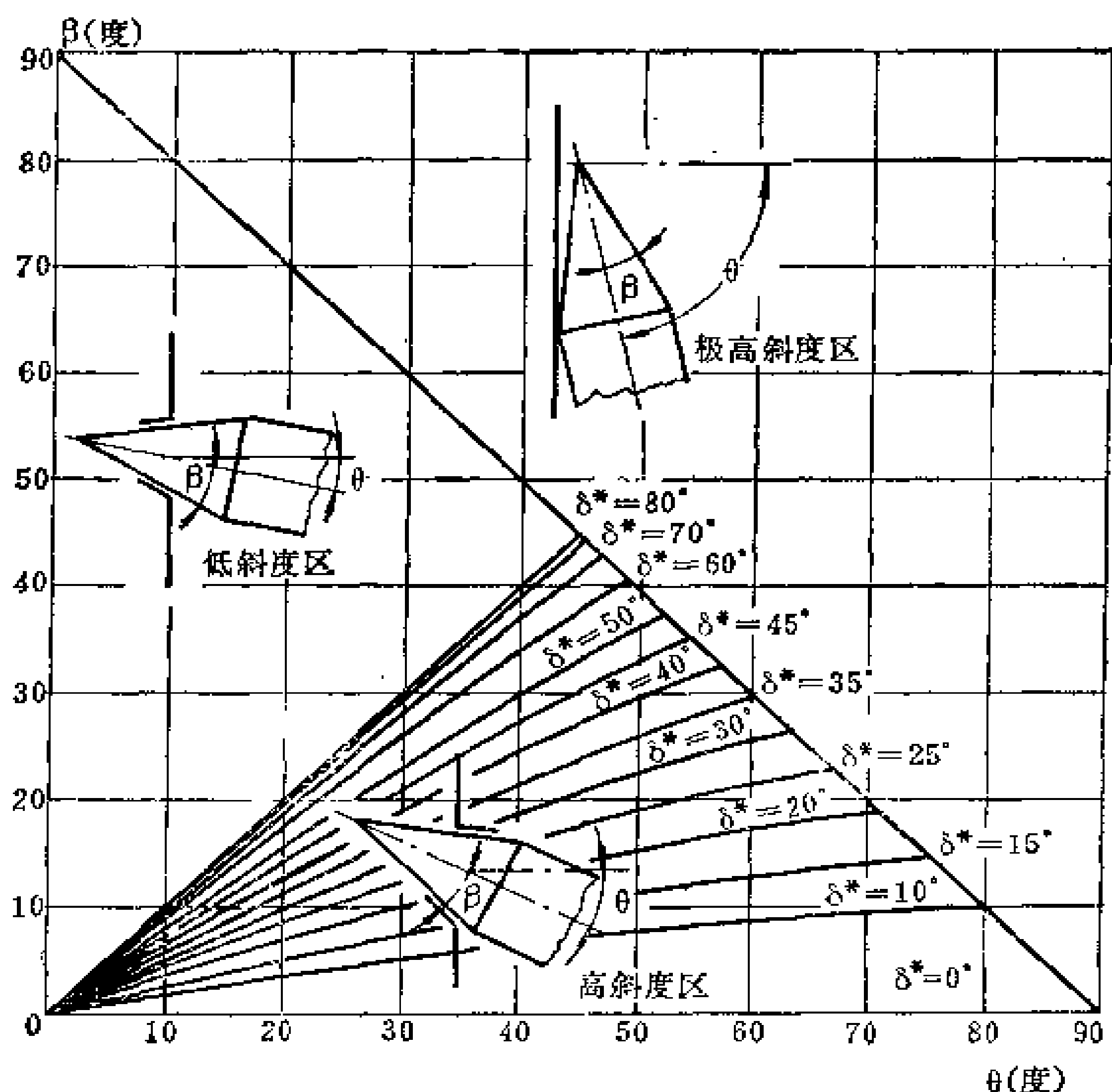


图8-34 δ*(β, θ)的曲线

当靶板到达 x 时，靶板从截顶处 $x=L_0$ 起掀起的花瓣质量，可以从椭圆 ds 所切割出的微元质量

$$dM=\rho_t h_t ds=\frac{1}{2}\rho_t h_t(a'^2-a^2)ds \tag{8.216}$$

求出（图 8-36)。

现在让我们求靶板变形时任意点 P 的运动速度。其变形位移见图 8-37 a 、b ，其中展示了 AOP 平面中向前花瓣和向后花瓣的位移。

向前运动的位移（图 8-37 a ）为

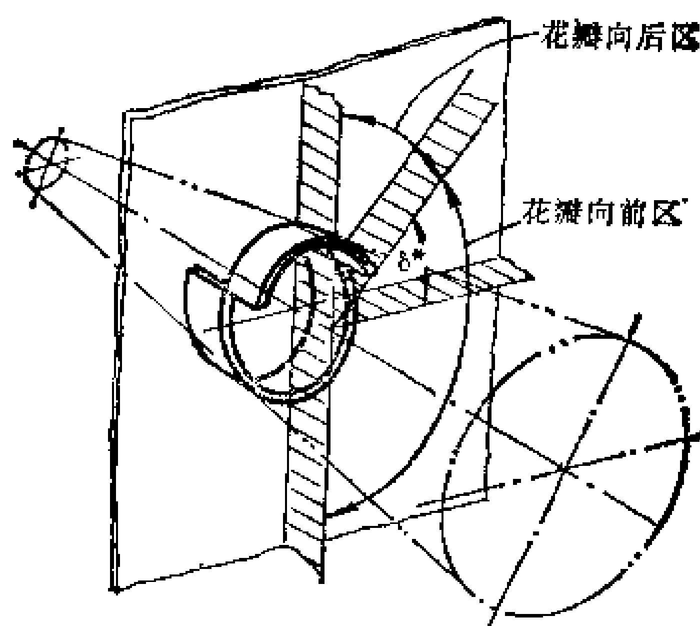


图8-35 花瓣向前、向后分区图

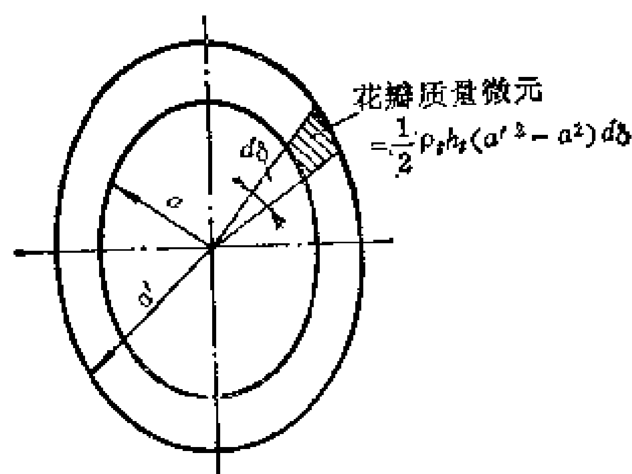


图8-36 花瓣质量微元的计算

$$\xi_f=(a'-r_0)(\cos\beta+\sin\lambda) \qquad (8.217)$$

在运动中，$\dot{r}_0=0$，$\dot{\lambda}=0$，所以有

$$\dot{\xi}_f=\dot{a}'(\cos\beta+\sin\lambda)=v(\cos\beta+\sin\lambda)\frac{da'}{dx} \qquad (8.218)$$

把 (8.210)，(8.215) 代入 (8.218)，得

$$\dot{\xi}_f=v\frac{\tan\beta(\sin\beta\sin\delta+\cos\beta)}{(1-\sin^2\theta\sin^2\delta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta} \qquad (8.219)$$

从图 8-37 *b*，对于向后运动的位移为

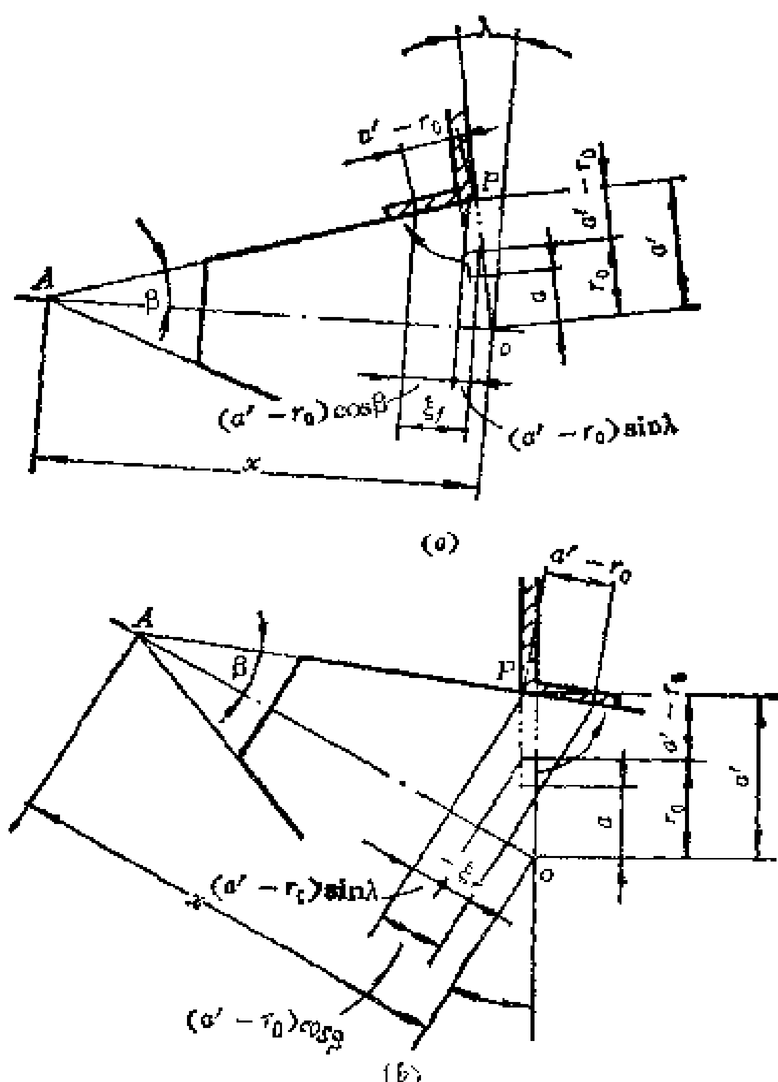


图8-37　靶板的变形位移

（a）向前运动的花瓣；（b）向后运动的花瓣。

$$-\xi_r=(a'-r_0)(\cos\beta-\sin\lambda) \tag{8.220}$$

同理可得

$$\dot{\xi}_r=v\frac{\tan\beta(\sin\beta\sin\delta-\cos\beta)}{(1-\sin^2\theta\sin^2\delta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta} \tag{8.221}$$

这里看到轴向速度 $\dot{\xi}_f$（向前）和 $\dot{\xi}_r$（向后）都与 r_0 无关，只和 δ 有关。

在计算花瓣的动量时，还要考虑下列诸现象。同时，还必须定义一个新的椭圆坐标角 δ^{***}。这个坐标角 δ^{***} 是花瓣元素从弹体上离开的区域的开始坐标角。这个角 δ^{***} 在下文研究花瓣的脱离问题时还要讨论。但是有一点是肯定的，花瓣脱离弹体表面总是开始于 $\delta^{***}=-\frac{\pi}{2}$，当侵入发展，它再不断增加。图8-

38是表示在第三阶段中各个时期的花瓣情况。为了简单起见，花瓣的形状并未绘出。

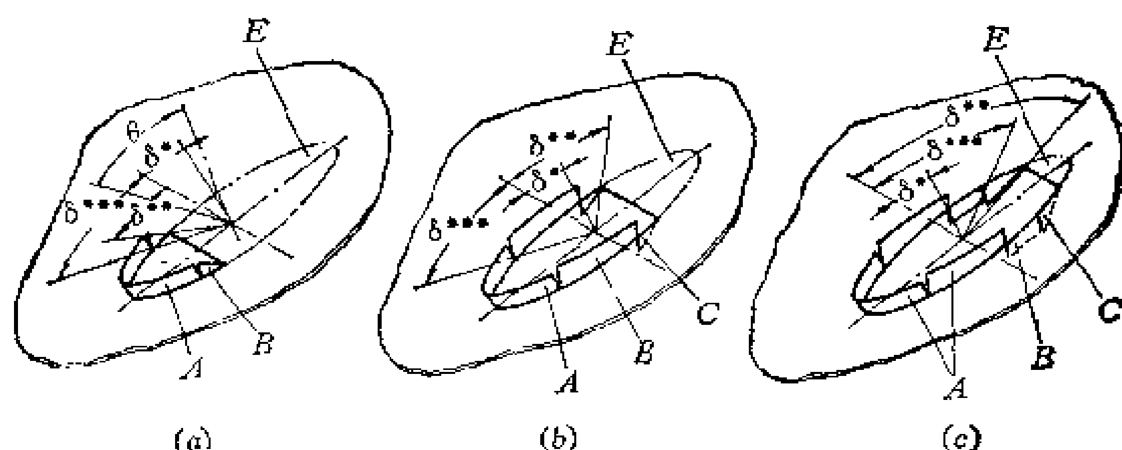


图8-38 在第三阶段中各个时期的花瓣情况

(a) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\delta^{***}\leqslant\delta^{**}\leqslant\delta^*\leqslant\frac{\pi}{2}$；(b) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\delta^{***}\leqslant\delta^*\leqslant\delta^{**}\leqslant\frac{\pi}{2}$，

(c) $0\leqslant\delta^*\leqslant\delta^{***}\leqslant\delta^{**}\leqslant\frac{\pi}{2}$。

对于$\delta^{***}=-\frac{\pi}{2}$时，这种图相当于第一阶段。当$\delta^{***}=-\frac{\pi}{2}$，同时$\delta^{**}=\frac{\pi}{2}$，它们相当于第二阶段。图中为了使向后花瓣出现，三个图都代表高斜度撞击。用δ^{***}，δ^{**}，δ^*等表示各个不同阶段时，有

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{第一阶段} & -\frac{\pi}{2}<\delta^{**}<\frac{\pi}{2},\quad \delta^{***}=-\frac{\pi}{2} \\
\text{第二阶段} & \delta^{**}=\frac{\pi}{2},\quad \delta^{***}=-\frac{\pi}{2} \\
\text{第三阶段} & -\frac{\pi}{2}<\delta^{**}<\frac{\pi}{2}, \\
 & -\frac{\pi}{2}<\delta^{***}<\frac{\pi}{2} \\
\text{第四阶段} & \delta^{**}=\delta^{***}=\frac{\pi}{2} \\
\text{低斜度} & \delta^*=\frac{\pi}{2},\quad \text{高斜度}\quad 0<\delta^*<\frac{\pi}{2}
\end{array}\right\}\quad(8.222)$$

紧贴弹头花瓣的最一般的轴向动量表达式为

$$M_{om花瓣}=2\int_{\delta^{***}}^{\delta^{*}}\dot{\xi}_{l}dM+2\int_{\delta^{*}}^{\delta^{**}}\dot{\xi}_{r}dM$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\delta^{***}\leqslant\delta^{*}\leqslant\delta^{**}\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\qquad(8.223)$$

利用了（8.194），（8.215），（8.216），（8.219），（8.221），上式可以写成

$$\frac{M_{om花瓣}}{\rho_t h_t v R_0^2\tan\beta}$$

$$=\left(\frac{x}{L}\right)^2\int_{\delta^{***}}^{\delta^{*}}\frac{\sin\theta\sin\delta+\cos\beta}{[(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta]^3}d\delta$$

$$-\int_{\delta^{***}}^{\delta^{*}}\frac{(\sin\theta\sin\delta+\cos\beta)(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{-1}}{(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta}d\delta$$

$$+\left(\frac{x}{L}\right)^2\int_{\delta^{*}}^{\delta^{**}}\frac{\sin\theta\sin\delta-\cos\beta}{[(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta]^3}d\delta$$

$$-\int_{\delta^{*}}^{\delta^{**}}\frac{(\sin\theta\sin\delta-\cos\beta)(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{-1}}{(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta}d\delta$$

(8.224)

对于图 8-38 a 的情况而言，我们在（8.224）中，取 $\delta^{*}\to\delta^{**}$ 的极限。对于图 8-38 c 的情况而言，我们在（8.224）中取 $\delta^{*}\to\delta^{***}$ 的极限。

方程（8.224）中有四个积分，我们分别用下列四种符号表示。

$$[I_1(\beta,\theta)]_a^b$$

$$=\int_a^b\frac{\sin\theta\sin\delta+\cos\beta}{[(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta]^3}d\delta\qquad(8.225\text{ a})$$

$$[I_2(\beta,\theta)]_a^b$$

$$=\int_a^b\frac{\sin\theta\sin\delta+\cos\beta}{[(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta][1-\sin^2\delta\sin^2\theta]}d\delta$$

(8.225 b)

$$[I_3(\beta,\theta)]_a^b = \int_a^b \frac{\sin\theta\sin\delta - \cos\beta}{[(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta]^3}d\delta \quad (8.225c)$$

$$[I_4(\beta,\theta)]_a^b = \int_a^b \frac{\sin\theta\sin\delta - \cos\beta}{[(1-\sin^2\delta\sin^2\theta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta][1-\sin^2\delta\sin^2\theta]}d\delta \quad (8.225d)$$

我们称

$$[I_5(\beta,\theta)]_a^b = [I_1(\beta,\theta)]_a^{\delta^*} + [I_3(\beta,\theta)]_{\delta^*}^b \quad (8.225e)$$

$$[I_6(\beta,\theta)]_a^b = [I_2(\beta,\theta)]_a^{\delta^*} + [I_4(\beta,\theta)]_{\delta^*}^b \quad (8.225f)$$

于是（8.224）可以简化为

$$\frac{M_{om花瓣}}{\rho_t h_t v R_0^2\tan\beta} = \left(\frac{x}{L_0}\right)^2 [I_5(\beta,\theta)]_{\delta^{***}}^{\delta^{**}} - [I_6(\beta,\theta)]_{\delta^{***}}^{\delta^{**}} \quad (8.226)$$

这个式子，对于任何 δ^*，δ^{**}，δ^{***} 都是适用的。

（3）花瓣和弹体的分离　这里将研究如何决定 δ^{***}。于是我们要求有公式表示 δ^{***}，而后可以从（8.226）计算花瓣动量。首先给出花瓣分离定理：

每一花瓣元素都以其在椭圆上的位置 δ 来决定的。当靶板平面和弹头基圆相交于 δ 处时，以 δ 来决定其位置的花瓣元素必和锥的生成元素分离。

证明如下：分离与否完全看花瓣和弹头表面间的接触压力是正压力还是负压力。从这点上，我们可以证明，分离准则为

$$\frac{d}{dt}|M_{om花瓣}| \leqslant 0 \quad (8.227)$$

由于 ξ 和 x 对运动着的花瓣而言是和运动无关的。所以所有花瓣元素在运动时的动量是一个常数。这样花瓣的动量增加只是由于花瓣质量增加而引起的。从图 8-39 中可以看到，向前的花瓣质量，在弹体前进中是增加的。这种增加的现象一直维持到锥头底圆和靶板平面相交为止。在到达这点以前，不会发生分离现象。方程式（8.227）确能作为分离的准则，即使向后花瓣有一部分

和锥面脱离接触时，也还不能说是分离了。因为在脱离接触的部分，不再有力作用在这一部分的花瓣上，这些花瓣质点仍以不变的速度顺着锥面生成线的延长线运动，所以，向后的花瓣也是以底圆和靶板平面相交以后，才有分离现象发生的。

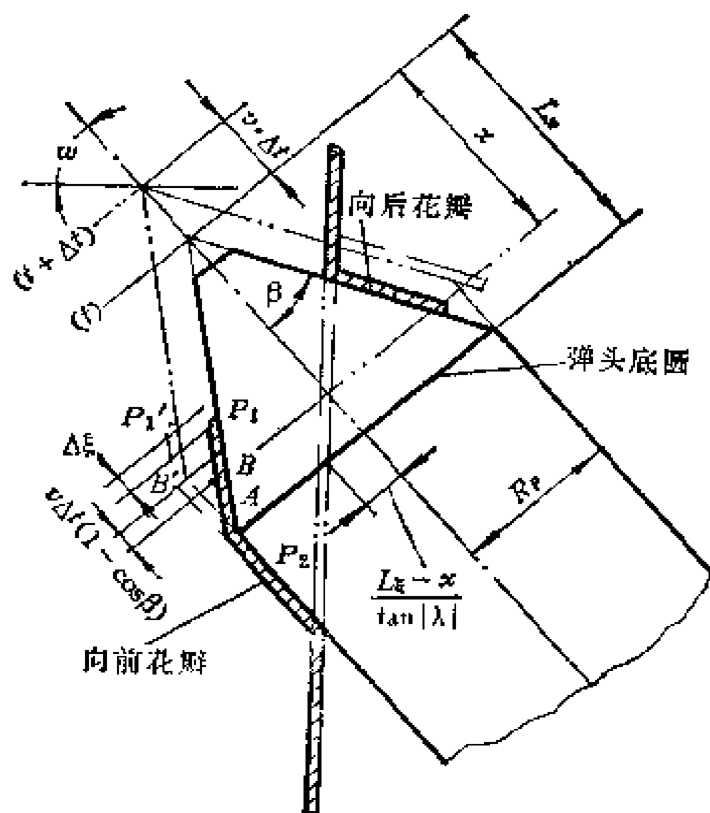


图8-39　花瓣在弹头前进中的变化

现在我们只须证明，在底圆和靶板平面相交后，立刻就发生分离。如果确是如此，则分离就发生在相交点上。同时，在底圆通过靶板平面后，$\frac{d}{dt}|M_{om花瓣}| = 0$ 对向后花瓣讲，显然是满足的。而且从此以后，继续如此。从图 8-39 看，花瓣从此起的确就和弹体不再有接触了。

对于向前的花瓣而言，在底圆和靶板平面相交后，弹体的半径不变，花瓣元素的质量即使在不分离的条件下也是不会再有变化。如果假定它是不分离的，由于这个花瓣的速度，在底圆和靶面相交后，只能是逐点降低，至多是不变，因此，它的动量也是降低的，这和不分离的假说矛盾，所以，一定只能分离。

根据图 8-39，P_1 点的速度用下法求得。

在 Δt 以后，弹体前进 $v\Delta t$，到达如图 8-39 的虚线处。原来在 AB 中的花瓣材料，现在处在 AB' 之间。原来在 BP_1 的花瓣材料，现在至 $B'P_1'$。设花瓣没有伸长，B，P_1，P_1'，B' 成为平行四边形的四个角点。所以 P_1 和 B 点的运动相同。所以 P_1P_1' 在轴上的投影和 BB' 在轴上的投影相同。于是，

$$\Delta\xi_{\text{I}P_1}=v\Delta t(1-\cos\beta) \tag{8.228}$$

而且

$$\xi_{\text{I}P_1}=v(1-\cos\beta) \tag{8.229}$$

对 P_2 点而言

$$\xi_{\text{I}P_2}=0 \tag{8.230}$$

所以，由于

$$\xi_{\text{I}P_2}\leqslant\xi_{\text{I}P_2} \tag{8.231}$$

我们只要证明

$$\xi_{\text{I}P_1}\leqslant\xi_{\text{I}P_1} \tag{8.232}$$

就可以证明花瓣分离原理。

如果（8.231)、(8.232）的等号成立，则分离与否就不能决定。从（8.219)、(8.229)、(8.232)，我们可以证明（8.232)为

$$(1-\cos\beta)\leqslant\frac{\tan\beta(\sin\theta\sin\delta+\cos\beta)}{(1-\sin^2\theta\sin^2\delta)^{1/2}+\tan\beta\sin\theta\sin\delta} \tag{8.233}$$

其中

$$0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\delta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{8.234}$$

引入新变量

$$\eta=\sin\theta\sin\delta,\quad -1\leqslant\eta\leqslant 1 \tag{8.234a}$$

(8.233）可以写成

$$(1-\cos\beta)\leqslant\frac{\tan\beta(\eta+\cos\beta)}{(1-\eta^2)^{1/2}+\eta\tan\beta} \tag{8.235}$$

我们可以证明（8.235）式的右侧是一个单调增加的函数。在端点 $\eta=1$ 时，其值最大。上式或可写成

$$1-\cos\beta\leqslant 1+\cos\beta\leqslant 1+\frac{1}{\eta}\cos\beta,\quad |\eta|\leqslant 1 \tag{8.236}$$

所以，只有当 $\eta=+1$ 时，等号才有可能实现。

$\eta=1$ 就等于说是 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\delta=\frac{\pi}{2}$。这在实际上是不存在的。在其它情况下，条件（8.236）也都是不现实的。因此，

我们只能说，花瓣和弹体并未重新接触。

从底圆和靶面相交的情况，我们可以求得 δ^{***}。从图 8-39，有

$$R_P\tan|\lambda^{***}|-(L_N-x)=0 \tag{8.237}$$

利用（8.210）

$$\sin\delta^{***}=\frac{\sin\lambda^{***}}{\sin\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\tan\lambda^{***}}{\sqrt{1+\tan^2\lambda^{***}}}$$

$$=\frac{-(L_N-x)/R_P}{\sin\theta\sqrt{1+\frac{(L_N-x)^2}{R_P^2}}}$$

$$=\frac{\frac{x}{L_N}-1}{\sin\theta\sqrt{\tan^2\beta+\left(\frac{x}{L_N}-1\right)^2}} \tag{8.238}$$

把本方程和（8.197）相比，可以看到，如果把 δ 改为 δ^{***}，把 $\frac{x_I}{L_0}$ 改为 $\frac{x_{II}}{L_N}$，则图 8-32 也可以用来表示 $\sin\theta\sin\delta^{***}$ 对 x_{II}/L_L 的关系，而且 x_I/L_0 和 x_{II}/L_N 的范围也是相同的。

现在可以计算分离的花瓣动量，它就等于转移到未分离的花瓣的动量。因为 $\xi_{II}=\xi_I=\xi$，所以分离的花瓣动量为

$$M_{om分离}=2\int_{-\pi/2}^{\delta^*}\xi_f dM_{II}+2\int_{\delta^*}^{\delta^{***}}\xi_r dM_I \tag{8.239}$$

其中 ξ_r，ξ_f 见（8.221），（8.219），dM_{II} 为

$$dM_{II}=\rho_t h_t\left(\frac{a''^2-a^2}{2}\right)d\delta \tag{8.240}$$

$\delta^{***}<\delta^*$，而且从（8.194）有

$$a''(\delta)=\frac{R_K}{(1-\sin^2\theta\sin^2\delta)^{1/2}} \tag{8.241}$$

最后，得

$$\frac{M_{om分离}}{\rho_t h_t(R_P^2-R_0^2)v\tan\beta}=[I_6(\beta,\theta)]_{-\pi/2}^{\delta^{***}} \tag{8.242}$$

（4）弹体的速度损失　根据动量守恒定律

$$\Delta v = v_0 - v = \frac{M_{om总}}{m_p} \tag{8.243}$$

其中

$$M_{om总} = M_{om靶块} + M_{om花瓣} + M_{om分离} \tag{8.244}$$

把（8.207），（8.226），（8.239）代入上式，得

$$\frac{m}{\rho_t h_t R_0^2 \tan\beta} \cdot \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{KA(\delta^{**})}{R_0^2 \tan\beta} + \left(\frac{x}{L_0}\right)^2 [I_5(\beta,\theta)]_{\delta^{***}}^{\delta^{**}}$$
$$+ [I_6(\beta,\theta)]_{-\pi/2}^{\delta^{***}} \left(\frac{R_p}{R_0}\right)^2$$
$$- [I_6(\beta,\theta)]_{-\pi/2}^{\delta^{**}} \tag{8.245}$$

引入$G(\beta, \theta, \delta^{**})$，它 和 $[I_5(\beta, \theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$、$[I_6(\beta, \theta)]_{\delta^{**}}^{\pi/2}$ 有关。它是

$$G(\beta, \theta, \delta^{**}) = 2(1 - \tan\beta\tan\theta)^2 [I_5(\beta,\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$- \left(\frac{x}{R_0}\right)^2 [I_5(\beta,\theta)]_{\delta^{**}}^{\pi/2} \tag{8.246}$$

$G(\beta, \theta, \delta^{**})$ 对$\beta = 20^\circ$时的曲线如图 8-40。

如果把（8.238）和（8.197）相比，则这些函数曲线，也可以被用来计算$G(\beta, \theta, \delta^{***})$。

我们还应该注意到$I_5(\beta, \theta)$和$G(\beta, \theta, \delta)$的关系

$$\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 [I_5(\beta,\theta)]_{\delta^{***}}^{\delta^{**}} = \left[\left(\frac{R_p}{R_0}\right)^2 - 1\right] G\left(\beta, \theta, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ G(\beta, \theta, \delta^{**}) - \left(\frac{R_p}{R_0}\right)^2 G(\beta, \theta, \delta^{***}) \tag{8.247}$$

图 8-41 为$\beta = 20^\circ$时的$[I_6(\beta, \theta)]_{-\pi/2}^{\delta} \sim \delta$曲线，所有$G(\beta, \theta, \delta)$和$I_6(\beta, \theta)$都是用数值积分求得的。

于是，总的速度损失为

$$\frac{m}{\rho_t h_t R_0^2 \tan\beta} \cdot \frac{\Delta v_{总}}{v_0} = \frac{K\pi}{\tan\beta\cos\theta}$$
$$+ \left[\left(\frac{R_p}{R_0}\right)^2 - 1\right] [I_6(\beta,\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \tag{8.248}$$

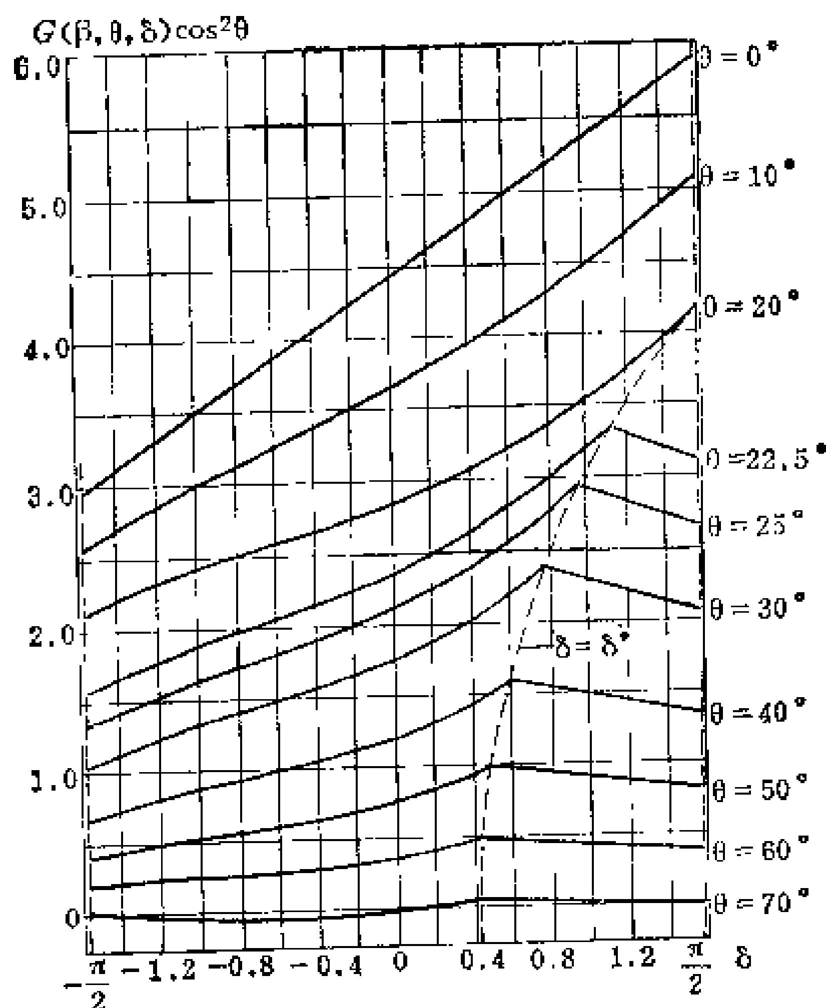


图8-40　$G(\beta,\ \theta,\ \delta)$和$\delta$的曲线($\beta=20°$)

其中$[I_6(\beta,\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$见图 8-42。

当斜度$\theta=0$时

$$\lim_{\theta\to 0}[I_6(\beta,\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2}=[I_6(\beta,0)]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi\cos\beta \tag{8.249}$$

于是

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{m}{\pi\rho_r h_r R_0^2}\ \frac{\Delta v}{v_0}=K+\sin\beta\left[\left(\frac{x}{L_0}\right)^2-1\right],$$

$$L_0\leqslant x\leqslant L_N \tag{8.250}$$

而总的速度损失为

$$\frac{m}{\pi\rho_r h_r R_0^2}\ \frac{\Delta v_{总}}{v_0}=K+\sin\beta\left[\left(\frac{R_p}{R_0}\right)^2-1\right] \tag{8.251}$$

它和正击的速度表达式相同，见（8.40）式。

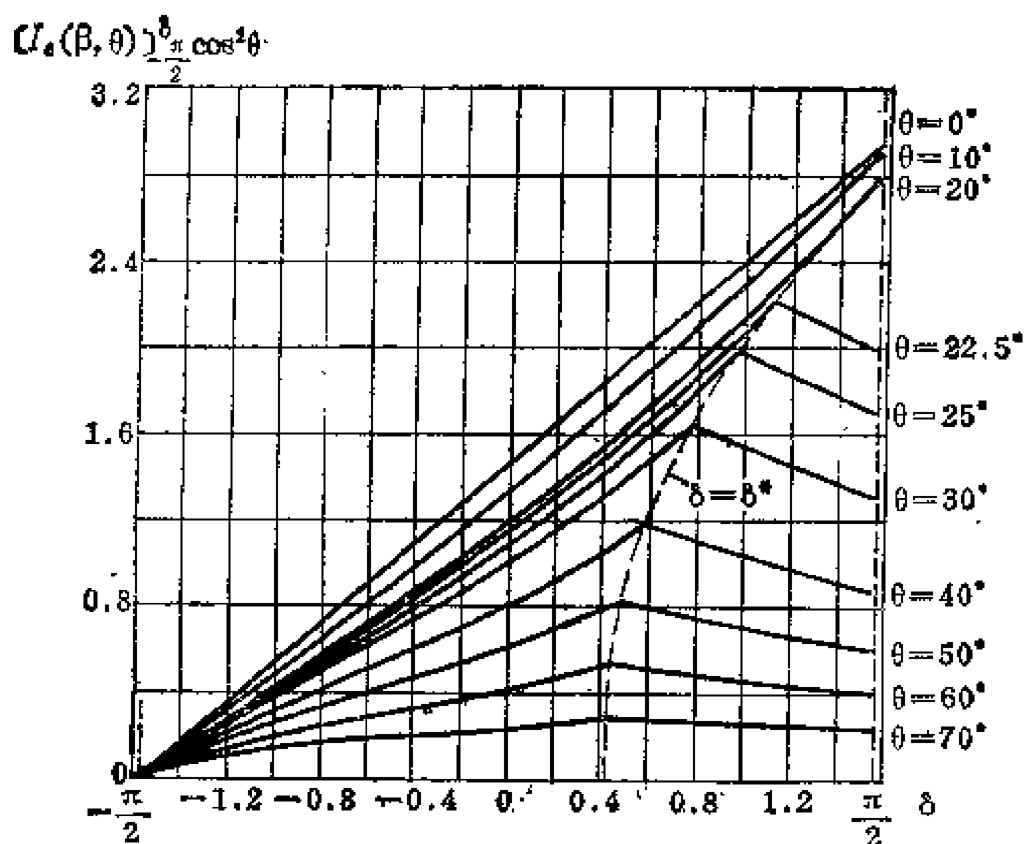


图8-41 $[I_6(\beta,\ \theta)]^{\delta}_{-\pi/2}$与δ的关系曲线（β = 20°）

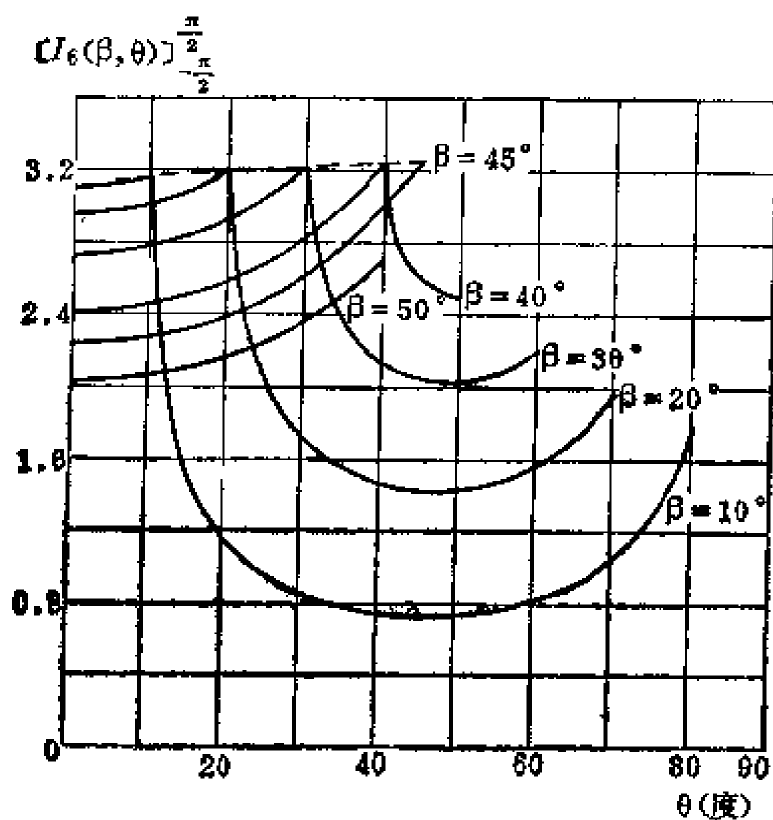


图8-42 $[I_6(\beta,\ \theta)]^{\pi/2}_{-\pi/2}$与θ的关系（β为各种常数）

§8.12 有关薄靶板的数值计算程序

业已有很多关于薄靶板在撞击中的计算程序，其计算基础为§2.5中各种方程。现将业已公开的结果列表如下：

表8-1 薄靶板的计算程序

编号	作者	参考文献	程序名称	处理的问题及其结果
(1)	T. D. Riney J. F. Heyda E. Hear	[8-41](1964) [8-42](1966)	VISTA (网格中质点) (轴对称)	(1) 实心圆柱弹体撞夹层板(速度15 mm/μs) (2) 空心圆柱弹体撞夹层板(速度15 mm/μs) 在靶体前方产生喷射物质，弹体中也产生反向喷射，都在轴上
(2)	R. T. Sedwick	[8-43](1968)	CRAM	用直径和靶板厚度相同的钢柱弹体撞击薄板和薄钢板，速度为0.61km/s，造成挤凿破坏，结果和[8-36]很一致
(3)	T. A. Duffey T. D. Riney	[8-44](1969)	DEPROSS (弹塑性程序)	夹紧圆板在爆炸加载下的弹塑性变形，和实验校核很好。本文结果，常被引用，可作为弹体撞击的典型成果
(4)	E. J. Halda T. D. Riney	[8-45](1966)	STEEP (欧拉程序)	研究用球弹打击铝钢和铝靶时引起喷射物质，撞击速度为7.5 mm/μs及15 mm/μs。把喷射物质的质量、轴向动量、功能化为喷射立体角的函数
(5)	K. N. Kreyenhager M. H. Wagner J. J. Piechacki B. L. Bjork	[8-46](1970)	SHAPE (网格中质点或(欧拉程序)	处理钢柱弹在7 mm/μs速度撞击多层靶板的结果，初始用流体动力学过程，接着用拉格朗日的弹塑性过程，求得弹道极限速度。用广义最大塑性应变准则，算出了挤凿和花瓣型破坏
(6)	S. R. Woodall J. F. Hoyda H. J. Galbraith L. L. Wilson	[8-17](1970)	CRAM	有关等重和等底圆半径的截顶锥头和截顶卵形弹体撞击钢和铝靶板，速度达1 km/s，还有撞击环氧树脂钢板(速度达130 m/s)，也研究了斜击
(7)	. W. Gehring	[8-28](1970)	CAMED	研究了在超高速撞击薄靶时发生的碎块问题，速度为3~7.5 mm/μs，材料为镉-镉，铅-铅
(8)	T. D. Riney	[8-32](1970)	VISTA	有关陨石撞击的缓冲器问题，撞击速度为$v_0 = 15$ mm/μs

（续）

编号	作　者	参考文献	程序名称	处理的问题及其结果
(9)	M. H. Wagner	[8-48](1973)	SHEP	钝头和尖头碳化钨和钢弹体以速度1～1.3 mm/μs，撞击钢甲板和铝板
(10)	R. T. Sedguick	[8-49](1973)	HELP	(1)超高速撞击的参数研究； (2)弹道撞击薄板时的挤击破坏； (3)空心聚能装药的射流形成
(11)	R. T. Sedgwick J. M. Walsh	[8-50](1971)	HELP	用五种不同形状的弹体撞击三种不同厚度的铝靶板和一种钢板，速度为0.5mm/μs。其解和实验结果符合很好，但和简单击穿理论[8-4]、[8-5]、[8-51]的剩余速度不一致
(12)	L. J. Hageman J. M. Walsh	[8-51](1971)	HELP	在军用弹道速度范围内的铁-铁撞击和铁-铝撞击
(13)	R. T. Sedgwick L. T. Hageman	[8-52](1972)	HELP	研究了当最大剪应力在不连续点之前达到比塑性功的临界值而产生的滑移线传播问题，用以说明挤凿破坏
(14)	R. T. Sedgwick L. T. Walsh	[8-53](1974)	HELP	研究击穿薄板的许多问题，包括碎块的功能侵入体，钢柱弹体，和空心聚能装药的喷射
(15)	R. T. Sedgwick J. Waddell L. J. Hageman L. D. Berthoff M. E. Kipp W. T. Browr	[8-55](1976) [8-56](1977)	HELP CSQ TOODY (二维程序)	以二维平面应变问题处理斜击问题。作为尝试，能求板的变形、弹体变形、弹体转向和运动方向的变化
(16)	G. R. Johnson	[8-57](1976) [8-58](1977)	EPIC (二维，三维)	可以用来处理三维撞击问题。用绿弹撞击中厚靶板，也用来研究斜击

参考文献

〔8-1〕 A. Brown, International J. Mechanical Science, 6, 257(1964).

〔8-2〕 M. Zaid and B. Paul, Mechanics of High Speed Projectile Perforation, J. Franklin Institute, 264, pp117-125(1957).

〔8-3〕 M. Zaid and B. Paul, Normal Perforation of a Thin Plate by Truncated Projectile, J. Franklin Institute, 265, pp317 336(1958).

〔8-4〕 M. Zaid and B. Paul, Oblique Perforation of a Thin Plate by a Truncated Conical Projectile, J. Franklin Institute, 268, 24-44(1959).

〔8-5〕 R. F. Recht and T. W. Ipson, Ballistic Perforation Dynamics, J. of Applied Mechanics, Trans of ASME, Ser. E, Vol. 30, No 3, pp384-390(1963).

〔8-6〕 M. Zaid and B. Paul, Mechanica of Thin Plate Perforation, Proc. Second Fuze Symposium, Diamond Ordnance Fuze Laboratories, (1956).

〔8-7〕 M. Zaid and B. Paul, Armor Penetration Survey, Ordnance, Vol. XLI, pp609-611(1957).

〔8-8〕 H. Richter, Rpt. LRSL 3/46(ISL), Franco-German Armament Research Establishment, St. Louis, France, Ballistics Institute(1946).

〔8-9〕 H Richter, Rpt, LRSL, 20/50(ISL), Franco-German Armament Research Establishment, St. Louis, France, Ballistics Institute (1950).

〔8-10〕 J. M. Krafft, J. Applied Physics, 26, 1248(1955).

〔8-11〕 M. L. Gabeaud, Memorial de l'Artillerie francaise 54(1935).

〔8-12〕 M Bufoureaux, Sciences et Techniques de l'Armement, Memorial de l'Artillerie francaise, 45, 645(1971).

〔8-13〕 J. V. Poncelet, Cours de Mecaniques Industrielle, Paris(1829/1935).

〔8-14〕 J. Nishiwake, J. Phys. Soc. (Japan), 6, 374(1951).

〔8-15〕 W. Goldsmith, NAVWEPS Report 7812, NOTS TP 2811, U.S. Naval Ordnance Test Station, China Lake, California(1962)

〔8-16〕 R. D. Gerbert, M. S. Thesis, Air Force Institute of Technology, School of Engineering, Wright Patterson Air Force Base, Ohio (1970).

〔8-17〕 J. F. Heyda, S. R. Woodall, D. A. Wolfgan and L. L. Wilson, Rpt. AFATL-TR 70-78, Air Force Armament Laboratory, Eglin Air Force Base(1970).

〔8-18〕 J Awerbuch and S. R. Bodner, Int. J. Solids Structure, 10, 671 (1974).

〔8-19〕 R. G. Thomson, NASA, Tech. Rpt. R-221(1965).

〔8-20〕 P. C Chow, In Developments Mechanics, Vol I, p286, North Ho-

Hand Amsterdam(1961).

〔8-21〕 J. Awerbuch and S. R. Bodner, International J Solid Structure, 10, 685(1974).

〔8-22〕 J. Awerbuch, Israel J. of. Technology, 8, 375(1970).

〔8-23〕 W. Goldsmith and S. A. Finnegan, International J. of Mechanical Sciences, 13, 843(1971).

〔8-24〕 E. H. Lee and S. J. Tupper, J. of Applied Mechanics, 21, 63(1954).

〔8-25〕 L. E. Fugelso and F. H. Bloedow, DDC, AD636, 224(1960).

〔8-26〕 C. J. Maiden, J. W. Gehring and A. R. McMillan, Peport, TRo3-225, General Moters Defense Research Laboratories, Santa Barbera, California, (1963).

〔8-27〕 C. J. Maiden, Proc. 6th Symp. Hypervelocity Impact, 3, 69(1963).

〔8-28〕 J. W. Gehring, Jr., In High-velocity Impact Phenomena, pp105-106, Academic Press, New York(1970).

〔8-29〕 G. Duvall, In Response of Metals to High Velocity Deformation, Metallurgical Soc. Confs., Vol. 9, p165, Interscience, New York (1961).

〔8-30〕 G. Duvall, In Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading, pp. 39-121, Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio(1972).

〔8-31〕 J. K. Dienes and J. M. Walsh, Theory of Impact, Some General Principles and the Method of Eulerian Codes, High-Velocity Impact Phenomena, Edited by Rey Kinslow, pp45-102, Academic Press, NewYork(1970).

〔8-32〕 T. D. Riney, Numerical Evaluation of Hypervelocity Impact Phenomena, High-Velocity Impact Phenomena, Edited by Ray Kinslow, pp157~212, Academic Press, New York(1970).

〔8-33〕 W. J. Rae, Analytical Studies of Impact-Generated Shock Propagation, High Velocity Impact Phenomena, Edited by Ray Kinslow, pp213-291, Academic Press, New York(1970).

〔8-34〕 P. Sandorff, A Meteroid Bumper Design Criterion, Symp. Hypervelocity Impact, 6th, 3, AD-423-063(1963).

〔8-35〕 G. R. Fowles, Attenuation of the Shockwave Produced in a Solid by a Flying Plate, J. Appl. Physics, 31, 655(1960).

〔8-36〕 R. F. Recht and T. W. Ipson, Ballistic Perforation Dynamics, J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, Ser. E, 30, 384 390(1963).

〔8-37〕 W. Johnson and S. R. Reid, Int. J. of Mechanical Sciences, 17, 71 (1975).

〔8-38〕 I. M. Hutchings, Int. J. of Mechanical Sciences, 18, 243(1976).

〔8-39〕 A. S. Soliman, S. R. Reid and W. Johnson, Int. J. of Mechanical

Sciences, 18, 279(1976).

[8-40] M.E.Backman and S.A.Finnegan, Tech.Rep.TP 5844, U.S.Naval Weapons Center, China Lake, California(1976).

[8-41] T.D.Riney and J.F.Heyda, Internal Technical Report ATL-TDR-64-64, General Electric Corporation, Space Science Laboratory (1964).

[8-42] T.D.Riney, J.F.Heyda and E.Hear, AFATL-TR-66-71, AD488138, Air Force Armament Laboratory, Eglin Air Force Base (1966).

[8-43] R.T.Sedgwick, Tech.Report, AFATL TR-68-61, Air Force Armamant Laboratory, Eglin Air Force Base(1966).

[8-44] T.A. Duffey and W.S. Key, Experimental Mechanics, 9, 241 (1969).

[8-45] E.J.Halda and T.D.Riney, Document No.66 SD 409 General Electric Corporation, Missile and Space Division, Philadelphia, Pennsylvania (1966).

[8-46] K.N.Kreyenhagen, M.H.Wagner, J.J.Piechocki and R.L.Bjork, AIAA,J., 8, 21-47(1970).

[8-47] S.R.Woodall, J.F.Heyda, H.J. Galbraith and L.L. Wilson, AFATL-TR-20-112, Air Force Armament Laboratory, Eglin Air Force Base(1970).

[8-48] M.H.Wagner, Proc.Army Symp. Solid Mechanics, 1972, pp196-208, AMMRCMS 73-2, AD772 827, Watertown, Massachusetts(1973).

[8-49] R. T. Sedgwick, Proc. Army Symp. on Solid Mechanics, pp209-219, AMMRCMS, 73-2, AD772-827(1973).

[8-50] R.T.Sedgwick, and J.M.Walsh, BRL Rept.33R-348, U.S.A. Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland(1971).

[8-51] W.T.Thomson, J.Applied Physics, 26, 80(1955).

[8-52] L.J.Hageman and J.M.Walsh, BRL Rpt.No.37, AD725-998, U.S.A.Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland(1971).

[8-53] R.T.Sedgwick and J.J.Hageman, Proc.Int.Conf.Dynamic Crack Propagation, pp679-691, Noodhoff, Amsterdam(1972).

[8-54] R.T.Sedgwick and L.J.Walsh, Proc.Int.Symp.Ballistics, IV-45, American Defense Preparedness Assoc., Orlando, Florida(1974).

[8-55] G.R.Johnson, J.Appl.Mech., ASME98, 439, (1976).

[8-56] G.R.Johnson, J.Appl.Mech., ASME, 99, 95(1977).

[8-57] G.R. Johnson, Proc. 3rd Int.Symp.Ballistics, American Defense Preparedness Assoc., GIV, Washington, D.C.(1977).

第九章　中厚靶板和厚靶板的撞击

§9.1　中厚靶板和厚靶板在撞击中的特点

中厚靶板和厚靶板有一个自由背面存在，它的存在对靶体和弹体之间的相互作用有一定影响。设计弹体的目的，当然主要是为了击穿靶体，但在某些情况下，不一定是为了击穿，而是为了尽可能地破坏靶板。这种靶板的相图和薄靶板的相图很不一样，它有相当显著的嵌埋相区。这种嵌埋相区代表弹体在撞击后发生侵入，在侵入至某一深度后，弹体运动完全停止。这对于动能弹体而言，当然没有达到击穿的目的，设计失败了；对于装有炸药的弹体而言，侵入深度代表弹体的破坏能力。因此，对于中厚靶板和厚靶板而言，侵入深度和弹道极限速度、剩余速度一样，也是研究撞击的重要内容。有关薄板和半无限靶体的研究成果，有许多是可以用在中厚靶板和厚靶板。不过，在采用这些薄板和半无限靶体的结论时，我们应该特别慎重和小心。在薄板问题中，板的背面对撞击有约束作用，在半无限靶体问题中，不存在背面，所以毫无约束。这些约束问题，在中厚板和厚板上又完全不一样，要另作处理。

§9.2　中厚靶板和厚靶板的经验公式

有关薄靶板的经验公式，在经验系数经过一定修正后，常常是可以用在中厚板或厚板上的。一般说来，这些经验无非是力和能量的非量纲比例。这一方面可以从〔9-1〕找到详尽的资料，可惜这个材料很难找到，在本节中，我们将较详细地讨论。所有的公式都有一定的限制，如材料、速度、几何形状和尺寸等限制。

侵入深度P和弹道极限速度v_{50}常常是用弹体质量m_p、靶厚

h_t、初始弹体速度 v_0 和弹体半径 R_p 作为独立变量来表示的。

$$P=\gamma_1 m_p^{c_1} v_0^{c_2} \qquad (9.1a)$$

$$v_{50}=\gamma_2 m_p^{c_3} h_t^{c_4} R_p^{c_5} \qquad (9.1b)$$

其中 γ_i 和 c_i 都是与材料和几何形状有关的常数。鲁滨斯[9-2]曾假想，材料的凝聚能力是侵入阻力的来源，而且认为材料表面的阻力小于中面附近的阻力。所以弹道极限速度 v_{50} 可以用下式表示，

$$v_{50}=\left[\frac{2\pi\gamma_2 R_p^2(h-b_1R_p)}{m_p}\right]^{1/2} \qquad (9.2)$$

其中 b_1 是和自由表面效应有关的实验系数。此后，麻省理工学院航空结构研究所提出了一个相类似的公式，来代表变形弹体，包括靶体的凝聚惯性阻力和自由面效应等影响[9-3]。

$$v_{50}=\gamma_2\left\{\frac{2}{a_1}\left[e^{\pi c_1\rho_t R_p^{*}h_t/m_p}-1\right]-\left[\gamma_3+\gamma_4\, e^{c_1\pi\rho_t R_p^{*}h_t/m_p}\right]\right\} \qquad (9.3)$$

其中 R_p^* 是从 v_0 取 762 米/秒时由下述经验公式决定的弹体半径

$$R_p^*=R_{p0}[1+\gamma_5(v-762)/762]^{1/2} \qquad (9.4)$$

如果弹体在撞击中不碎，则（9.1b）可以用不同经验参量来代表不同的弹体-靶体组合。例如：在米·千克·秒单位制中

$$\left.\begin{array}{lllll}
(a) & \gamma_2=3.37, & c_3=-0.5, & c_4=1, & c_5=0.5\\
(b) & \gamma_2=0.21, & c_3=-0.33, & c_4=0.67, & c_5=0.35\\
(c) & \gamma_2=0.064, & c_3=-0.5, & c_4=0.65, & c_5=0.75\\
(d) & \gamma_2\text{可变}, & c_3=-0.75, & c_4=0.75, & c_5=1.5
\end{array}\right\} \qquad (9.5)$$

如果斜击时的斜角为 θ，则

$$v_{50}=\gamma_6\left[\frac{h_t R_p^2}{m_p}\sec\theta\right]^{1/2} \qquad (9.6)$$

在正撞中的侵入深度 P 也可以从假想的阻力的规律决定。如果侵入阻力只和迎面的面积成正比，则侵入深度 P 可以写成[9-3]

$$P/D=\gamma_7\rho_p v_0^2+b_6 \qquad (9.7)$$

其中 γ_7 为经验常数，b_2 是用来考虑自由表面的影响的。

如果 $\rho_p v_0^2$ 是和 P/D 的二次方或三次方成正比，则（9.7）式可以修改为

$$P/D=\gamma_8\rho_p{}^{1/2}v_0 \tag{9.8a}$$

或

$$P/D=\gamma_9\rho_p{}^{1/3}v_0^{2/3} \tag{9.8b}$$

后者和〔9-4〕中所建议的公式相同。

也有人从弹体所受阻力 F 和速度 v 及侵入深度 z 之间的关系着手研究。例如，有下面几种假定

$$F=-a_1D^2v,\quad F=-a_2z^2v,\quad F=-a_3zD/v,$$
$$F=-a_4z^2/\rho_pv^2 \tag{9.9}$$

也可以把阻力 F 看作纯粹是 z 的函数，如

$$F=-a_5zD/\rho_p,\quad F=-a_6z^5/D^3\rho_p,$$
$$F=-a_7(\rho_pD^5z)^{1/3},\quad F=-a_8(D^3z)^{1/2} \tag{9.10}$$

其中 a_i 为经验常数。从这些力的假设而论，可分别给出不同的侵入深度

$$P/D=\gamma_{10}\rho_pv_0,\quad P/D=\gamma_{11}\rho_p^{1/3}v_0^{1/3},$$
$$P/D=\gamma_{12}\rho_p^{1/2}v_0^{3/2},\quad P/D=\gamma_{13}\rho_p^{2/3}v_0^{4/3} \tag{9.11}$$

如果把阻力用一个惯性力和一个纯粹阻力之和 $a_9D^2(a_{10}\sigma_{YC}+\rho_tv^2)$ 来表示，则 P/D 可以写成[9-5,9-6]

$$P/D=\frac{1}{2a_9}\left(\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)\ln\left[1+\frac{1}{a_{10}}\left(\frac{\rho_tv_0^2}{\sigma_{YC}}\right)\right] \tag{9.12}$$

（9.12）和下文中的一个分析模型[9-7]的结果也相同。也可以用 a_{10}^*BHN 来代替（9.12）式中的 $a_{10}\sigma_{YC}$。在速度较低的范围内，σ_{YC} 的强度效应大于 $\rho_tv_0^2$，所以 $\rho_tv_0^2/\sigma_{YC}$ 可以略去，于是 $P/D\to0$。但当 $\rho_tv_0^2\gg a_{10}\sigma_{YC}$ 时，这一项是不能略去的。

克赖夫脱[9-8]曾建议，当锥头弹体在弹道速度下侵入硬金属靶板时，阻力 F 可以写为

$$F = A_N\left[p_{st}(\Theta) + a_{11}\frac{\rho_t}{m_p}\left(\frac{1}{2} mv^2 - \frac{Fz}{3}\right) + a_{12}v/z \right] \tag{9.13}$$

其中 p_{st} 为靶板的抗压强度，它是温度 Θ 的函数；A_N 为嵌埋的弹头的基圆面积。

如果靶板背面的效应不重要，则一般半无限体的正击侵入深度公式，在作了适当修正以后，也可以用在中厚靶板和厚靶板侵入深度的计算上。特别在高速和超高速的撞击中，有不少这类的公式可供使用。常见的根据量纲分析的关系可以写成下式

$$\frac{P}{D} = \gamma_{14}\left(\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)^{c_6}\left(\frac{v_0}{c_{Ut}}\right)^{c_7}\left(\frac{\rho v_0^2}{\sigma_{Yt}}\right)^{c_8} \tag{9.14}$$

其中 $D = D_e$，为等效圆球弹体的半径。如果不是圆球弹体，则可以调整常数来满足特殊的实验条件。上式典型的数值为

γ_{14}	c_6	c_7	c_8
2.28	2/3	2/3	0 [9-3,9-4,9-11]
1.96	1/2	2/3	0 [9-10]
任意	1/3	0	1/3 [9-12]
任意	1/3	1/3	0 [9-12]
任意	2/3	0	1/3 [9-13]
2.5	0	0	$1/4\left(1 \leqslant \frac{v}{c_J} \leqslant 2\right)$ [9-14]
0.395	0.56	0.625	－1 （铝）[9-15]
0.482	0.537	0.576	－0.235 [9-16]
0.311	0.167	0	0.282 （用 σ_{YT} 代替 σ_{US}）[9-17]

还有和上述公式相类似的经验公式[9-3,9-13,9-14]

$$\frac{P}{D} = \gamma_{15}\left(\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)^{2/3}\ln\left(1 + \frac{\rho_p^{2/3}\rho_t^{1/3}v_0^2}{a_{13}\,\mathrm{BHN}}\right) \tag{9.15}$$

式中

$$\gamma_{15} \approx 0.6;$$

$$a_{13} = 4\,。$$

这个公式在很大的撞击速度范围内适用，也适用于韧性的弹体，

但对于各种不同材料的弹体和靶体组合，γ_{15}，a_{13} 都是不同的，要求实验测定。如果 $\rho_P^{2/3}\rho_t^{1/3}v_0^2/(a_{13}\mathrm{BHN}) \ll 1$，则（9.15）可以近似为

$$\frac{P}{D}=\gamma_{15}\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^{2/3}\frac{\rho_P{}^{2/3}\rho_t^{1/3}v_0^2}{a_{13}\mathrm{BHN}}=\gamma_{15}\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^{4/3}\left(\frac{\rho_t v_0^2}{a_{13}\mathrm{BHN}}\right) \tag{9.15 a}$$

很易看到，本式是（9.14）式的类型，$c_6=\frac{4}{3}$，$c_7=0$，$c_8=1$

也有人采用公式[9-13]

$$\frac{P}{D}=\gamma_{16}\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^{2/3}\left(\frac{\rho_t v_0^2}{\mathrm{BHN}}\right)^{1/3} \tag{9.16}$$

这个公式在2.5～5千米/秒范围内都适用，可以用于各种不同金属的靶板。

还有建议用公式[9-18]

$$\frac{P}{D}=1.3\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^{1/3}\left(\frac{v_0}{c_{0t}}\right)^{2/3}\left[\frac{E_t}{6.9\times10^9}\right]^{0.09} \tag{9.17}$$

其中E_t为靶板杨氏模量，单位为GPa。

也有人认为侵入深度应和弹体单位迎风面面积的弹体动量成正比，但应该有一个强度项作为修正项[6-10,6-19]，它可以写成

$$P=\gamma_{17}(\rho_P v_0 L_P-b_3) \tag{9.18}$$

还可以把金属靶的阻力根据经验用靶材料的布氏硬度数BHN来表示[9-20]

$$P=\gamma_{18}m_P^{1/3}v_0{}^{C_6}/(\mathrm{BHN})^{C_7} \tag{9.19}$$

其中$C_6=\frac{1}{3}$，$C_7=\frac{1}{4}$或$C_6=\frac{2}{3}$，$C_7=\frac{1}{3}$。

有不少经验公式是用在高速或超高速度范围内表示弹坑容积的。决定弹坑容积的有两种假设：一种假设认为弹坑容积应该和弹体的撞击动能 T_0 成正比[9-21]，另一种认为它和 $\rho_t T_0 Q_\Phi$ 成正比[9-22]，其中 Q_Φ 为熔化热。不少有关弹坑容积的经验公式，是和弹坑深度公式有关系的。下列诸公式都是以实际弹体体积、或等效的圆球弹体体积Γ_{Pe}、或弹体原有动能 T_0为量度的弹坑容积Γ_c

的经验公式

$$\frac{\Gamma_e}{\Gamma_{P_e}}=8.8\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)\left(\frac{v_0}{c_{ot}}\right)^2\left(\frac{E_t}{6.9\times10^9}\right)^{0.27} \tag{9.20 a}$$

此式和（9.17）有关[9-21]。其中E_t的单位为 MPa。

$$\frac{\Gamma_e}{\Gamma_{Pe}}=34\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^2\left(\frac{v_0}{c_{ot}}\right)^2 \tag{9.20 b}$$

此式和（9.14）的第一组参数有关[9-4]。

$$\frac{\Gamma_e}{\Gamma_{Pe}}=30.25\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^{3/2}\left(\frac{v_0}{c_{ot}}\right)^2 \tag{9.20 c}$$

此式和（9.14）的第二组参数有关[9-10]。

$$\frac{\Gamma_e}{\Gamma_{Pe}}=46.8\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)\left(\frac{v_0}{c_{ot}}\right)^2\gamma_{US}^{1/6} \tag{9.20 d}$$

[9-23]

式中γ_{US}为破坏强度的一个参数。

$$\frac{\Gamma_e}{\Gamma_{Pe}}=0.12\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)^{1/2}\left(\frac{\rho_P v_0^2}{\sigma_{USt}}\right)^{0.846} \tag{9.20 e}$$

此式和（9.14）的第九组参数有关[9-17]。

$$\frac{\Gamma_e}{\Gamma_{Pe}}=1-e^{-a_{14}T_0} \tag{9.20 f}$$

[9-24]

$$\Gamma_e/T_0=b_{12}(c_{ot}\rho_t)^{-1} \tag{9.20 g}$$

[9-26]

$$\Gamma_e/T_0=100\left[3.1\pm0.6\left(\frac{\rho_t}{\rho_P}\right)^{2/3}(\mathrm{BHN})\right]^{-1} \tag{9.20 h}$$

式中　BHN以达因/厘米^{2}为单位。

在参考文献〔9-26〕、〔9-21〕上还可以找到一些其它有关的经验公式:

弹坑直径D_e的经验公式为

$$\frac{D_e}{D_P}=4.5\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)\left(\frac{v_0}{c_{ot}}\right)^{2/3} \tag{9.21 a}$$

此式适用于半球形弹坑[9-8]。

$$\frac{D_e}{D_P}=2.6\left[\left(\frac{\rho_P}{\rho_t}\right)\left(\frac{v_0}{c_{ot}}\right)\right]^{0.2}\left(\frac{h_t}{D}\right)^{2/3}+1 \tag{9.21 b}$$

此式适用于薄板[9-27]。

$$\frac{D_c}{D_p}=\left(\frac{\rho_p}{\rho_t}\right)^{0.065}\left[\frac{\rho_p}{\rho_t}\cdot\frac{v_0^2}{\sigma_{UTt}}\right]^{0.01}\left(\frac{2h_t}{D}\right)^{2/3}+1 \quad [9\text{-}17] \tag{9.21c}$$

§9.3 培含扩孔理论

培含首先提出以扩孔过程来研究弹体侵入靶板问题[9-28]。他认为弹头侵入靶板是把弹孔不断扩大的弹塑性过程。他假定靶板是一块无限大的板，假定$h_0>D$，而且处于平面应变情况下，他研究一个半径为R的对称圆孔扩大到半径为R_f的对称圆孔的弹塑性过程。他的模型比较简单，靶板分为两部分，一部分在内侧，是完全塑性的（按屈列斯卡屈服准则，屈服应力为σ_Y）；另一部分在外侧，是弹性的。内外两部分的分界圆的半径为r_Y，它是由瞬时弹孔半径R决定的。全部理论都只考虑平面内的应力，而且是轴对称的。培含的想法受到泰勒的极度重视。泰勒把大变形中的协调条件加以仔细研究，大大改进了培含的理论。泰勒的理论以及后来弗拉埃堡格的发展都已在§7.4、§7.5、§7.6诸节中详细介绍，对培含的理论似乎无须再介绍了。但是，应该看到培含是扩孔理论的始倡者，泰勒和后来的工作都是从培含的工作中发展出来的，因此对培含工作的介绍还是有意义的。但是培含的原文[9-28]很难见到，在〔9-3〕中曾略有介绍，而〔9-3〕的文章也很难找到，只有在〔9-29〕中有一些简单的介绍，从中可以看到他的工作还是有很大的实用价值的。我们现在利用这个机会，把培含的工作介绍给读者，读者还可以参阅§7.4、§7.5、§7.6诸节的内容。

从圆柱扩展的准静力学解，我们可以求得一级近似的弹塑性交界圆的半径r_Y

$$r_Y=R\sqrt{\frac{E}{(2.5-2\nu)\sigma_Y}} \tag{9.22}$$

其中R为当时的孔径。弹性范围和塑性范围（根据屈列斯卡屈服准则即摩尔准则）内的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{1}{2}\sigma_Y=\left(\frac{r_Y}{r}\right)^2\\ \sigma_\phi &= \frac{1}{2}\sigma_Y\left(\frac{r_Y}{r}\right)^2\end{aligned}\right\}（弹性范围）\quad r\geqslant r_Y \tag{9.23}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_Y &= -\sigma_Y\left(\ln\frac{r_Y}{r}+\frac{1}{2}\right)\\ \sigma_\phi &= \sigma_Y\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{r_Y}{r}\right)\end{aligned}\right\}（塑性范围）\quad r\leqslant r_Y \tag{9.24}$$

而位移（在弹性区）为

$$u_r=\frac{1+\nu}{5-4\nu}\frac{R^2}{r}\qquad (r>r_Y) \tag{9.25}$$

更正确的u_r和 γ_Y可以从下述改进而求得。

（1）把（8.32）的解改成动力学方程的解

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}\qquad (r>\gamma_Y) \tag{9.26}$$

（2）扩孔过程更具体化，对于卵形弹体（弹头长 L_N，用等速v_0侵入）而言，近似地可以把瞬时孔径R写成

$$R=\begin{cases}0, & 当\ t<0\\ R_P\sin\dfrac{\pi v_0 t}{2L_N}, & 当\ 0<t<\dfrac{L_N}{v_0}\\ R_P, & 当\ t>L_N/v_0\end{cases} \tag{9.27}$$

（3）在塑性区域，改用运动方程

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\sigma_r}{r}\qquad (r<r_Y) \tag{9.28}$$

这样就可以找到解决交界圆半径r_Y的方程式

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{r_Y}{R}\right)=&\frac{1}{2}\ln\frac{2E_t}{(5-4\nu)\sigma_Y}-\frac{1}{(5-4\nu)\sigma_Y}\\ &\times\left\{\left(\frac{4\nu-1}{1-\nu}\right)E_t\left[b_1^*\left(\ln r_Y+\frac{1}{2}\right)+b_2^*\right]\right.\\ &+\frac{3}{4}(1-2\nu)\rho_t\left(\frac{R_P v_0}{L_N}\right)^2\\ &\left.\times\left[2\cos\frac{2v_0 t}{L_N}+\frac{3(1-2\nu)}{5-4\nu}\right]\right\}\end{aligned} \tag{9.29}$$

在瞬时孔径R处的径向应力$\sigma_r(R)$为

$$-\sigma_r(R)=\frac{1}{2}\sigma_Y\left\{\ln\left[\frac{E_t}{(5-4\nu)\sigma_Y}\right]+1+\frac{1}{2}\rho_t\left(\frac{R_p v_0}{L_N}\right)^2\right.$$

$$\times\cos\frac{2v_0t}{L_N}\left[\frac{2E}{(5-4\nu)\sigma_Y}-\frac{11-16\nu}{2(5-4\nu)}\right]$$

$$+\rho_t\frac{4(1-\nu)^2}{(5-4\nu)^2}\left(\frac{R_p v_0}{L_N}\right)^2\left[\cos\frac{2v_0t}{L_N}\right.$$

$$\times\left(Ci\frac{2v_0t}{L_N}-0.5772-\ln\frac{v_0r_Y}{c_K L_N}\right)$$

$$\left.\left.+\sin\frac{2v_0t}{L_N}Si\frac{2v_0t}{L_N}-\frac{1}{4}\right]\right\} \tag{9.30}$$

其中Si和Ci是正弦和余弦积分函数。还有b_1^*、b_2^*及c_K为

$$b_1^*=\frac{1+\nu}{5-4\nu}R_P^2\left(\frac{v_0}{c_K L_N}\right)^2\cos\left(\frac{2v_0t}{L_N}\right) \tag{9.31a}$$

$$b_2^*=\frac{1+\nu}{5-4\nu}R_P^2\left(\frac{v_0}{c_K L_N}\right)^2\left\{\frac{2v_0t}{L_N}\ln\frac{v_0}{c_K L_N}+0.5772\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}-Ci\left(\frac{2v_0t}{L_N}\right)-\sin\left(\frac{2v_0t}{L_N}\right)Si\left(\frac{2v_0t}{L_N}\right)\right\} \tag{9.31b}$$

$$c_K=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \tag{9.31c}$$

侵入的总阻力W_F为

$$W_F=-h_0\int_0^R 2\pi R\sigma_r(R)dR$$

$$=\pi R_P^2h_0\left[3.03\sigma_Y+0.455\rho_t\left(\frac{v_0R_P}{L_N}\right)^2\right] \tag{9.32}$$

其中的第二项代表动力修正。

培賫倡议用平均屈服应力$\bar{\sigma}_Y$，它是

$$\bar{\sigma}_Y=\sigma_Y^*\left(1+\gamma^*\ln\cot\frac{v_0t}{L_N}\right) \tag{9.33}$$

其中和σ_Y^*有关的应变速度为

$$\dot{\epsilon}^* = \left(\sqrt{\frac{5-4\nu}{2E}}\,\sigma_Y^*\right)\left(\frac{v_0}{L_N}\right) \qquad (9.34)$$

Y^*为一常数，对钢而言Y^*在0.1到0.2之间。

§9.4 波恩-福赫斯的刚弹阻力厚板模型

波恩-福赫斯认为当刚弹进入靶体后，其阻力可以写为[9-7]

$$F = \pi R_p^2 \left[(\mathrm{BHN})^{1/2} + \left(\frac{1}{2}\psi\rho_t\right)^{1/2} v\right]^2 \qquad (9.35)$$

很易看到，共有两部分阻力。其中静阻力$f_{静}$和靶板材料的强度有关

$$f_{静} = \pi R_p^2(\mathrm{BHN}) \qquad (9.36\mathrm{a})$$

还有动阻力

$$f_{动} = \frac{1}{2}\pi R_p^2 \psi \rho_t v^2 \qquad (9.36\mathrm{b})$$

其中ψ和弹头形状有关，称为弹型系数。对于尖头弹体、圆球以及陨石而言，分别为1/3、2/3和1(9.36b)。实际上是流体动力学的流动阻力。

波恩-福赫斯认为$f_{静}$和$f_{动}$的组合并不是单纯代数相加，而是一种矢量组合，即$F = (\sqrt{f_{静}} + \sqrt{f_{动}})^2$。这即为（9.35）。

弹体的运动方程为

$$m_p \frac{d^2 v}{dt^2} = -\pi R_p^2 \left[(\mathrm{BHN})^{1/2} + \left(\frac{1}{2}\psi\rho_t\right)^{1/2} v\right]^2 \qquad (9.37)$$

或可写成

$$m_p v \frac{dv}{dx} = -\pi R_p^2 \left[\left((\mathrm{BHN})^{1/2} + \left(\frac{1}{2}\psi\rho_t\right)^{1/2} v\right]^2 \qquad (9.37\mathrm{a})$$

积分得

$$-\frac{2m}{\pi R_p^2 \psi \rho_t}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2} v} + \ln\left[1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2} v\right]\right\} = x + C_1 \qquad (9.38)$$

C_1可以通过起始条件即 $x=0$， $v=v_0$决定，所以

$$C_1=-\frac{2m}{\pi R_p^2\psi\rho_t}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0}+\ln\left[1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0\right]\right\} \tag{9.39}$$

于是

$$x=\frac{2m}{\pi R_p^2\psi\rho_t}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0}-\frac{1}{1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v}+\ln\left[\frac{1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0}{1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v}\right]\right\} \tag{9.40}$$

当 $v=0$ 时， x 等于侵入深度P，所以有

$$P=\frac{2m}{\pi R_p^2\psi\rho_t}\left\{\ln\left[1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0\right]-1+\frac{1}{1+\left(\frac{\psi\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0}\right\} \tag{9.41}$$

对于圆球弹体而言， $m=\frac{4}{3}\rho_p\pi R_p^3$， $\psi=1$，我们有

$$\frac{P}{D}=\frac{4\rho_p}{3\rho_t}\left\{\ln\left[1+\left(\frac{\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0\right]-\frac{\left(\frac{\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0}{1+\left(\frac{\rho_t}{2\mathrm{BHN}}\right)^{1/2}v_0}\right\} \tag{9.42}$$

这个公式完全是理论性的，但和许多实验结果相符很合，包括韧性材料的弹体在内，也适用于范围相当大的撞击速度。

§9.5 求击穿后剩余速度的里希脱能量法

里希脱-尹泼荪[8-36](1963)的薄板击穿理论，必须经过修正，才能用以处理厚板。修正的方法见里希脱的著作[8-30]。

对于厚板而言，开始时挤凿质量m_t不一定和靶板中最后真正挤凿出来的凿块质量m_{tf}相等，一般说来$m_{tf}>m_t$。

首先，我们在击穿前后，有能量守恒方程

$$\frac{1}{2}m_p v_0^2=\frac{1}{2}(m_p+m_{tf})v_f^2+E_q+E_s \qquad (9.43)$$

这里假定击出的凿块质量为m_{tf}，E_q为撞击初始阶段（从接触到发生塑性变形，最后达到弹体靶面共同前进）所耗能量，E_s为击穿过程中所耗的剪切功。

设在初始阶段弹体m_p和靶块m_t所达到的共同速度为v^*，于是所耗能量为

$$E_q=\frac{1}{2}m_t v_0^2-\frac{1}{2}(m_p+m_t)v^{*2} \qquad (9.44)$$

根据动量守恒定律，我们有

$$m_p v_0=(m_p+m_t)v^* \qquad (9.45)$$

消去v^{*2}，得

$$E_q=\frac{1}{2}\frac{m_p m_t}{m_p+m_t}v_0^2 \qquad (9.46)$$

于是(9.43)可以写成

$$\frac{1}{2}\frac{m_p^2}{m_p+m_t}v_0^2=\frac{1}{2}(m_p+m_{tf})v_f^2+E_s \qquad (9.47)$$

当v_0达到弹道极限速度v_{50}时，$v=0$，于是有

$$E_s=\frac{1}{2}\frac{m_p^2}{m_p+m_t}v_{50}^2 \qquad (9.48)$$

把(9.48)代入(9.47)得

$$v_f^2=\frac{m_p^2}{(m_p+m_t)(m_p+m_{tf})}(v_0^2-v_{50}^2) \tag{9.49}$$

或者

$$v_f=\left[\left(1+\frac{m_{tf}}{m_p}\right)\left(1+\frac{m_t}{m_p}\right)\right]^{-1/2}(v_0^2-v_{50}^2)^{1/2} \tag{9.50}$$

其中，如果弹体是圆柱形弹体，直径为D_p，长为L，则

$$\frac{m_t}{m_p}=\frac{\rho_t}{\rho_p}\left(\frac{D_t}{D_p}\right)\frac{h_t}{L} \tag{9.51}$$

对于尖头弹体而言，并不形成凿块，(9.50) 可以写成

$$\frac{v_f}{v_{50}}=\left(\frac{v_0}{v_{50}}-1\right)^{1/2} \tag{9.52}$$

对于斜击问题而言，厚板在斜角撞击下的凿块质量为

$$m_{tf}=\frac{\pi\rho_t D^2 h_t}{4\cos\theta} \tag{9.53}$$

其中 θ 为撞斜角。

§9.6 尖弹击穿厚板的五阶段理论

尖弹击穿厚板过程中，可以根据不同几何条件分为五个阶段，在不同阶段中，刚弹所受作用是不同的[9-31](1975)。每一阶段的初始条件就是前阶段的终了位移和终了速度。在每一阶段中弹体所受阻力由两种力组成：即弹头扩孔法向力的轴向分量的合力和切向屈服剪应力的合力。如果我们以 x 为位移，$\frac{dx}{dt}=v$，则在各个阶段中有下列各种阻力表达式（图9-1)。

(1) 阶段Ⅰ $(0<x\leqslant L_N)$

$$F(x)=-(A_1\dot{x}^2+B_1)x^2 \tag{9.54}$$

其中

$$A_1=\frac{1}{2}\pi\rho_t\tan\beta\sin^2\beta(\tan\beta+f^D) \tag{9.54 a}$$

$$B_1=\pi\sigma_{Yc}\tan\beta(\tan\beta+f^D) \tag{9.54 b}$$

(2) 阶段Ⅱ $(L_N\leqslant x\leqslant L)$

$$F(x)=-[A_2\dot{x}^2+C_2(x-L_N)+B_2] \tag{9.55}$$

其中

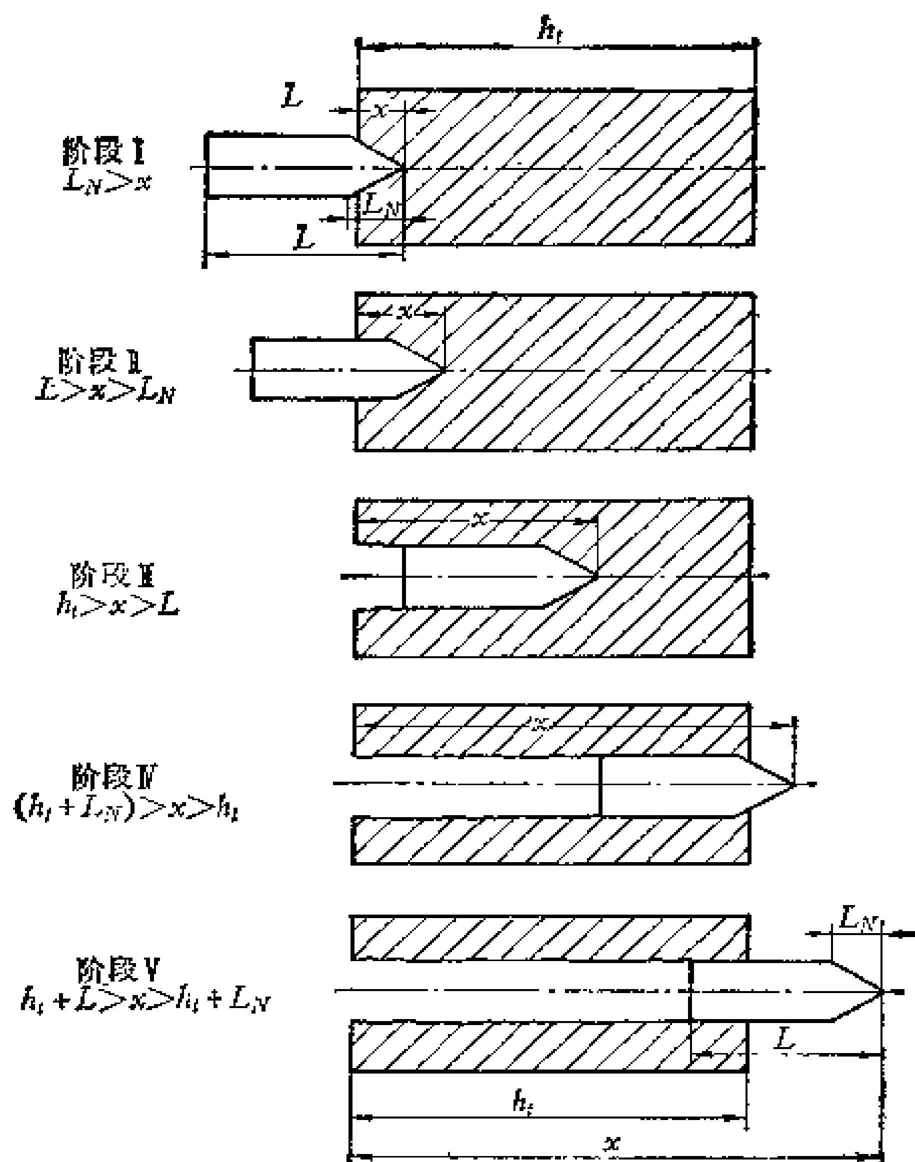


图9-1　尖弹击穿厚靶板的五个阶段

$$A_2=A_1L_N^2 \tag{9.55a}$$

$$B_2=B_1L_N^2 \tag{9.55b}$$

$$C_2=\pi\sigma_{YC}f^pD_p \tag{9.55c}$$

（3）阶段Ⅲ （$L\leqslant x\leqslant h_t$）

$$F(x)=-[A_2\dot{x}^2+C_2(L-L_N)+B_2] \tag{9.56}$$

（4）阶段Ⅳ （$h_t\leqslant x\leqslant h_t+L_N$）

$$F(x)=-\left[A_4e^{-\frac{2A_2}{m}(z-L)}+B_4(z-h)^2e^{-\frac{2A_1}{3m}(x-h_t)^3}\right] \tag{9.57}$$

其中

$$A_4=A_2v_{\rm I}^2-C_2(L-L_N)-B_2 \tag{9.57a}$$

$$B_4=-A_1v_{\rm II}^2+B_1 \tag{9.57b}$$

$v_{\rm I}$、$v_{\rm II}$ 为第二阶段和第三阶段末尾的速度

（5）阶段V （$h_t+L_N\leqslant x\leqslant h_t+L$）

$$F(x)=-C_2(h_t+L-x) \tag{9.58}$$

人们用50mm直径的钝头的、锥头的、平球头的和卵形头的子弹(重量都是40克)，在467～767米/秒速度下撞击钢板所测得的结果，和上述阻力公式所得结论完全相符。在计算时取$f^D=0.25$，$\sigma_{YC}=75.8$MPa。

§9.7 潘松的半经验阻力公式（1974～1976）

潘松[9-32,9-37]提出了一个半经验的刚性球弹击穿厚靶板的阻力公式。在这个公式中，阻力也是由两项组成，一项是有关弹塑性强度的阻力项，它和变形速度无关，只和动力屈服压缩强度σ_{YC}^D有关；另一项是惯性力，作用在球弹的迎击面的法线方向，还有切线方向的摩擦阻力，速度越高，摩阻越低。这个公式据称适用于初速度为几百米每秒的范围之内，这个速度使穿越靶体的时间大于声波传越靶体厚度所需时间，但这个速度也还不是高到足以使弹体变形。因为涉及的应力在各种时间内都是屈服强度，不随时间而变，所以总阻力可以积分求得。弹体对前方表面和对后方表面的影响，各用因子$\xi_g(x)$和$\xi_h(x)$来表示。总的阻力为

$$F=\xi_g(x)\xi_h(x)(a_1+a_2+f^D)(\gamma\sigma_{YC}^D+b_2\rho_t\dot{x}^2) \tag{9.59a}$$

其中

$$\xi_g(x)=1-e^{-x/(B_1D)},\quad \xi_h(x)=1-e^{-(x-1-B_2D)/(B_3D)} \tag{9.59b}$$

$$a_1=\begin{cases}\pi(D-x)x, & 0\leqslant x\leqslant D/2\\ -\dfrac{\pi D^2}{4}, & x>D/2\end{cases} \tag{9.59c}$$

$$a_x=\begin{cases}\dfrac{D^2}{8}(2\zeta-\sin 2\zeta), & 0\leqslant x\leqslant D/2\\[2mm] \dfrac{\pi^2D^2}{8}, & x>D/2\end{cases} \tag{9.59d}$$

其中

$$\zeta=\cos^{-1}\left(1-\frac{2x}{D}\right) \tag{9.59e}$$

$$f^D=f\left[1+e^{\frac{x-B_4}{B_5}}\right]^{-1} \tag{9.59f}$$

还有

B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，b_2都是材料常数　　(9.60a)

f =低速时的摩擦系数　　(9.60b)

σ_{YC}^D=动力屈服系数　　(9.60c)

都是实验测定的常数。

(9.59a) 中的 γ 原来[9-32]规定为3.5，但从泰伯[9-33]的著作看，γ 应该在2.6～2.9之间，它和压痕阻力和屈服应力之比有关。通过对两种铝合金和低碳钢的实验测定，给出了这些常数[9-32]，见表9-1。

表9-1　潘松理论中各种常数的测定

材料	材料性质						参数						
	ρ 克/厘米³	E GPa	σ_{YC} MPa	σ_{UC} MPa	BHN	σ_{YC}^D MPa	f	b_2	B_1	B_2	B_3	D_4 米/秒	D_5 米/秒
SIS4007-14铝	2.7	70	70	90	25	80	0.95	0.29	0.5	1.15	0.7	510	120
SIS4212-6铝	2.7	70	260	300	115	181	0.92	0.29	0.5	1.15	0.7	570	210
低碳钢	7.85	205	—	—	692	530	0.52	0.29	0.5	1.15	0.7	2000	100

计算结果证明，它和 8 mm硬钢球弹在500～1500米/秒的速度下撞击100mm、25mm 厚的两种铝板的实验结果很符合。

此后，潘松把上述结果推广到其它形状的弹头[9-34]。它的半径分布为